

Szczypiński P, Materka A.

*Geometryczne modele deformowalne do analizy i rozpoznawania obrazów.*

Problemy Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej, 2013; 6:175-212,  
Komitet Metrologii i Aparatury Naukowej PAN,  
Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej, ISBN 978-83-7493-784-9

modele deformowalne  
analiza obrazów cyfrowych  
endoskopia kapsułkowa

Piotr M. SZCZYPIŃSKI\*  
Andrzej MATERKA\*

## GEOMETRYCZNE MODELE DEFORMOWALNE DO ANALIZY I ROZPOZNAWANIA OBRAZÓW

Opracowanie stanowi przegląd oryginalnych rozwiązań z dziedziny metod numerycznych, wykorzystujących modele deformowalne do analizy obrazów cyfrowych. Przedstawiono w nim model radialny aktywnego konturu oraz deformowalnej powierzchni do segmentacji obrazów dwu- i trójwymiarowych. Opisano działanie modeli siatkowych oraz ich zastosowania w śledzeniu ruchu, dopasowaniu obrazów i rozpoznawaniu obiektów. Ponadto, szczegółowo opisano uniwersalną metodę kompensowania deformacji w modelach parametrycznych o dowolnej topologii. Końcowa część pracy poświęcona jest przykładom zastosowań modeli deformowalnych w analizie filmów endoskopowych oraz obrazów rentgenowskich ziaren zbóż.

## GEOMETRIC DEFORMABLE MODELS FOR IMAGE ANALYSIS AND RECOGNITION

The paper provides an overview of the original numerical methods utilizing deformable models for the digital images analysis. It presents a radial active contour model and a deformable surface for segmentation of two- and three-dimensional images. Describes the principals of deformable grid models and their applications in motion tracking, image registration and object recognition. Moreover, a versatile algorithm for deformation compensation in parametric deformable models of arbitrary topology is described in details. The final part of the paper presents application examples of deformable models in endoscopic video and x-ray images of cereal kernels analysis.

### 1. WPROWADZENIE

Niniejsza praca stanowi przegląd opracowań oryginalnych modeli deformowalnych – metod analizy i rozpoznawania obrazów cyfrowych. Modele deformowalne umożliwiają rozwiązanie istotnych problemów dotyczących segmentacji obrazów w dwóch i trzech wymiarach, identyfikacji obiektów i śledzenia ich ruchu a także dopasowania obrazów, których rozwiązanie innymi metodami jest wyjątkowo trudne.

Tradycyjne techniki przetwarzania obrazów wymagają na ogół aby wyniki jednej procedury stanowiły dane wejściowe następnej. Stosunkowo proste techniki i algorytmy łączone są kolejno tworząc bardziej skomplikowane systemy przetwarzania i analizy obrazów. Przykładowo problem segmentacji obrazu rozwiązuje się zazwyczaj dzieląc go na mniejsze zagadnienia rozwiązywane kolejno. Pierwsze z nich może polegać na progowaniu jasności, drugie na korekcji kształtu

\* Politechnika Łódzka, Instytut Elektroniki, Wólczańska 211/215, 90-924 Łódź

wyodrębnionych obszarów metodami morfologicznymi a trzecie na identyfikacji obszarów stanowiących cel segmentacji [1]. Należy jednak zwrócić uwagę, że w każdym z tych kroków część informacji zawartej w obrazie jest tracona i nie jest dostępna w kolejnym etapie.

Analiza obrazów obejmuje często zagadnienia i problemy, których rozwiązanie wymaga zastosowania równoległe kilku algorytmów w taki sposób aby wpływały one na siebie wzajemnie, a efekt końcowy uwzględniał – w pewnych proporcjach – wyniki uzyskane przez każdy z nich. Podejście to można porównać do sposobu uzyskiwania rozwiązań w wyniku dyskusji prowadzonych w zespołach ludzkich, w których poszczególni uczestnicy przedstawiają własne opinie, próbując się wzajemnie przekonywać do swoich racji wpływając na siebie wzajemnie, co w efekcie ma prowadzić do osiągnięcia rozwiązań kompromisowych. Pozytywnym efektem takiego podejścia jest wzajemne korygowanie błędnych opinii lub, w przypadku metod numerycznych, błędnych wyników działania.

Modele deformowalne stanowią jedno z możliwych podejść do łączenia odrębnych metod, które funkcjonując łącznie uzupełniają się i korygują efekty swoich działań. Cechą wspólną i wyróżnikiem modeli deformowalnych jest między innymi umożliwienie połączenia wybranego algorytmu przetwarzania obrazu oraz metody narzucającej ograniczenia wynikające ze wstępnej wiedzy o zależnościach przestrzennych występujących w analizowanym obrazie. Podejście takie prowadzi do powstania jakościowo nowych rozwiązań o zwiększonej odporności na zakłócenia i umożliwia uwzględnienie różnorodnej wiedzy a-priori dotyczącej przedmiotu analizy.

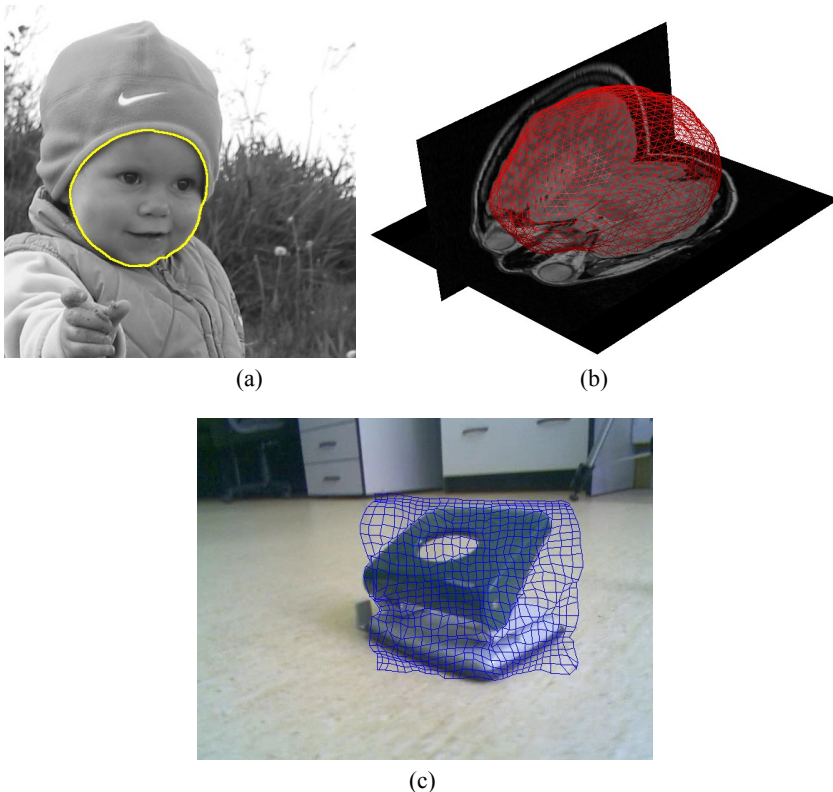
Ideę i sposób działania modeli deformowalnych najprościej można przedstawić na przykładzie aktywnego konturu [2]. Model ten jest przykładem połączenia algorytmu obliczania gradientu jasności obrazu z wiedzą o tym, że kontur jest ciągłą i gładką krzywą. w matematycznym opisie aktywny kontur jest krzywą daną funkcją parametryczną  $\mathbf{v}(s) = [x(s), y(s)]^T$ , gdzie  $\mathbf{v}$  jest wektorem współrzędnych punktów krzywej, a  $s \in \langle 0, l \rangle$  jest parametrem. Aktywnemu konturowi przypisuje się pewien funkcjonal nazywany energią wewnętrzną (1.1). Ta energia jest całką lokalnych gęstości energii liczoną wzdłuż konturu. Gęstość energii w każdym punkcie konturu jest sumą dwóch składników. Pierwszy,  $E_e$  (tzw. energia zewnętrzna), reprezentuje udział algorytmu, który analizuje obraz lokalnie, nie uwzględniając zależności przestrzennych o rozległym charakterze. Drugi natomiast,  $E_i$  (tzw. energia wewnętrzna, energia naprężeń), reprezentuje narzucone ograniczenia dotyczące zależności przestrzennych w obrazie wynikające z wiedzy początkowej.

$$E = \int_0^1 (E_e(s) + E_i(s)) ds \quad (1.1)$$

$$E_e(s) = -\xi \nabla I(x(s), y(s)) \quad (1.2)$$

$$E_i(s) = \tau \left| \frac{d\mathbf{v}}{ds} \right|^2 + \rho \left| \frac{d^2\mathbf{v}}{ds^2} \right|^2 \quad (1.3)$$

W klasycznym modelu aktywnego konturu [2] energia  $E_e$  (1.2) jest proporcjonalna do wartości bezwzględnej gradientu jasności obrazu w punkcie  $\mathbf{v}(s)$  ze znakiem minus. Energia  $E_i$  (1.3) jest obliczana z wykorzystaniem równania energii potencjalnej struny. Współczynniki  $\rho$ ,  $\tau$  i  $\zeta$  są parametrami, a  $I(\cdot)$  jest funkcją jasności obrazu. Parametr  $\rho$  określa odporność modelu na zginanie (sprężystość), parametr  $\tau$  – odporność na rozciąganie (rozciągliwość), natomiast  $\zeta$  – siłę, z jaką oddziałuje obraz. Poszukiwanie rozwiązania, w tym przypadku konturu w obrazie, polega na minimalizacji wartości funkcjonału (1.1) przez modyfikowanie współrzędnych punktów krzywej danych wektorem  $\mathbf{v}$ .

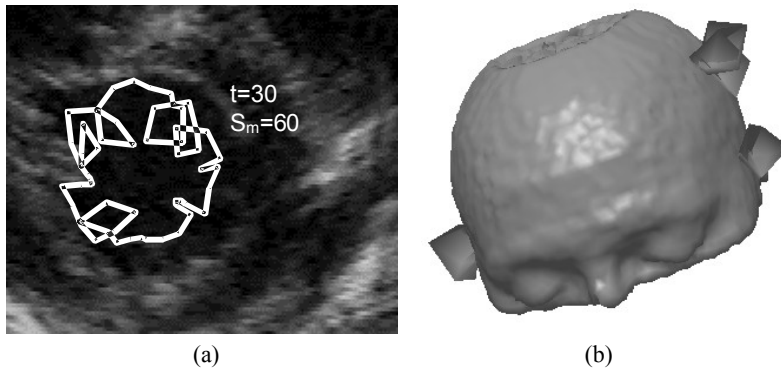


Rys. 1.1. Reprezentacje dyskretnych modeli deformowalnych: (a) krzywej, (b) zamkniętej powierzchni trójwymiarowej i (c) wzorca.

Figure 1.1. Representations of discrete deformable models: (a) an active contour, (b) a closed three-dimensional surface, and (c) a deformable grid.

W praktyce problem rozwiązywany jest numerycznie, co wymaga dyskretyzacji parametru  $s$ . Krzywa ciągła staje się linią łamaną, a całka równania (1.1) zostaje zmieniona w sumę energii cząstkowych w punktach załamań (węzłach modelu). Funkcjonał staje się funkcją wielu zmiennych, gdzie zmiennymi są współrzędne poszczególnych punktów załamań krzywej.

Modele deformowalne, w zależności od zastosowania, różnią się od siebie pod wieloma względami. Pierwszym z nich jest ich topologia (Rys. 1.1). w przypadku aktywnego konturu służy on do segmentacji obrazu i umożliwia wyodrębnienie pewnego obszaru zainteresowania. w przypadku segmentacji obrazów trójwymiarowych, np. tomografii komputerowej, do segmentacji stosuje się model deformowalnej powierzchni zamkniętej. Do śledzenia ruchu [3] w obrazach wideo oraz do dopasowania [4] obrazów medycznych stosuje się model deformowalnego wzorca. w formie dyskretnej jest on grafem planarnym, którego węzły mogą zmieniać położenie, i który stanowi medium pośredniczące umożliwiające dopasowanie do siebie w sposób elastyczny zawartości dwóch nieznacznie różniących się obrazów dwuwymiarowych [5]. Podobny model o strukturze przestrzennej przypominającej sieć kryształu można stosować do dopasowania trójwymiarowych obrazów tomograficznych [6].



Rys. 2.1. Przykłady nieprawidłowo zmienionego porządku węzłów (zapętlenia): (a) w aktywnym konturze balonowym i (b) w deformowalnej powierzchni.

Figure 2.1. Examples of incorrectly altered order of nodes (loops) in: (a) a balloon active contour and (b) a deformable surface.

Modele deformowalne można również klasyfikować ze względu na sposób obliczania wpływu obrazu (kontury poszukujące brzegu obszaru [2] lub bazujące na cechach jego wnętrza [7]), na sposób modelowania ograniczeń wynikających z zależności przestrzennych [3], [8], metodę minimalizacji funkcjonału energetycznego (model dynamiczny [9]) oraz przeprowadzenia dyskretyzacji parametru lub jej braku (modele parametryczne lub poziomicowe [10]). Wydaje się, że tak duża różnorodność modeli deformowalnych jest zaletą pozwalającą na dobór odpowiedniego modelu do konkretnego zastosowania. z drugiej jednak strony należy

zauważyć, że nie istnieje jeden uniwersalny model odpowiedni do rozwiązywania dowolnego problemu, a dobór właściwego rozwiązania jest zazwyczaj pracochłonny i wymaga przeprowadzenia wielu eksperymentów. Należy też zwrócić uwagę na to, że rozwiązania prezentowane w dostępnej literaturze są niedoskonałe pod wieloma względami, ukierunkowane na rozwiązanie wąskiej klasy problemów, niekoniecznie w sposób optymalny [11], [12]. Ponadto, okazuje się, że w specyficznych zastosowaniach należy sięgać po rozwiązania wymagające opracowania nietypowych topologii [3], [13], zastosowania specyficznych metod obliczania wpływu obrazu [14] lub nietypowego modelowania naprężeń [3], [8].

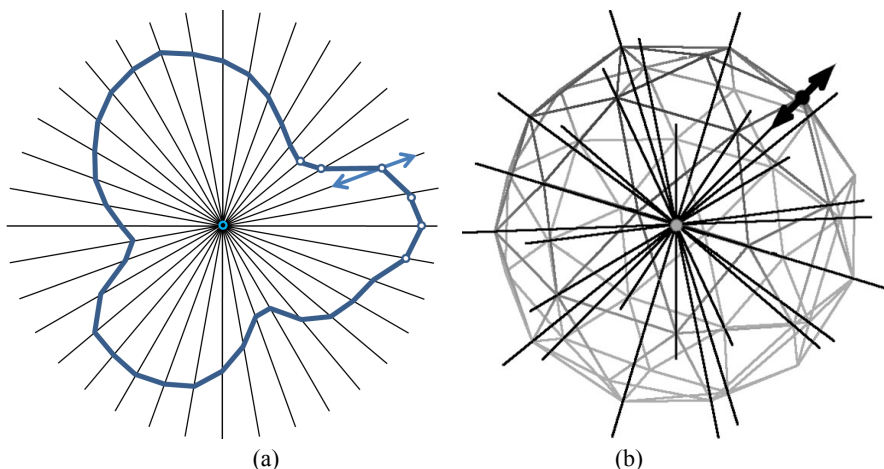
W kolejnych podrozdziałach przedstawiono przegląd oryginalnych opracowań będący wkładem w rozwój metod analizy obrazów wykorzystujących modele deformowalne. Umożliwiają one rozwiązanie problemów, których rozwiązanie za pomocą znanych modeli nie było możliwe. Wśród nich są: aktywnego kontur radialny do szybkiej segmentacji obrazów dwu i trójwymiarowych, algorytmy obliczania naprężeń za pomocą szablonów geometrycznych oraz siatki odniesienia, a także metoda dopasowania dwuetapowego umożliwiająca dopasowanie do siebie detali obrazów w stosunkowo krótkim czasie.

## 2. MODEL RADIALNY

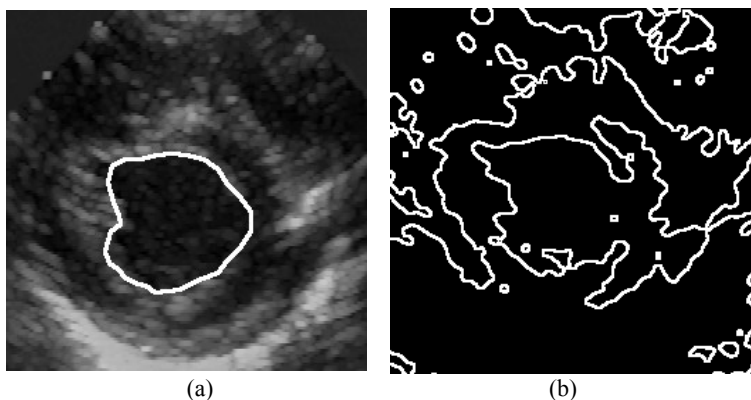
Klasyczny aktywny kontur [2] zmienia kształt pod wpływem wartości bezwzględnej gradientu jasności obrazu. Węzły modelu przemieszczają się w stronę tych miejsc obrazu, w których wartości te są duże. Problem pojawia się w przypadku obrazów z zakłóceniami, lub w przypadku, w którym nie występują gwałtowne zmiany jasności na granicy rozdzielanych obszarów. Węzły modelu „przyciągane” są wówczas do miejsc, w których występują duże gradienty jasności wynikające z zakłóceń, lub w wyniku minimalizacji składowej danej równaniem 1.3 model przyjmuje kształt okręgu nie pokrywający się z rzeczywistą, poszukiwaną krawędzią obszaru.

Rozwiązaniem problemu okazał się model konturu analizujący właściwości obszarów [7], [15]. Działanie tego modelu polega na analizie lokalnych cech obrazu. Jeśli wskazują one, że węzeł znajduje się wewnątrz wydzielanego obszaru to jest on „wypychany” na zewnątrz. w przeciwnym przypadku węzeł „wciągany” jest do wewnątrz. w najprostszym przypadku, jeśli rozgraniczane obszary różnią się jasnością, analizowaną cechą jest właśnie lokalna jasność obrazu.

W modelu bazującym na właściwościach obszarów konieczne jest, dla każdego węzła, określenie kierunku i zwrotu wektora wskazującego wewnątrz lub zewnątrz. w modelu balonowym [16] są one określone za pomocą przybliżonego wektora normalnego do krzywej konturu w danym węźle. Jest to jednak rozwiązanie niedoskonałe nie zapobiegające zjawisku zapętlenia się konturu (Rys. 2.1). Ponadto, minimalizacja energii wewnętrznej modelu balonowego wykorzystuje procedury krokowe i jest czasochłonna – wymaga przeprowadzenia złożonych obliczeń wektorowych dla każdego węzła w każdej iteracji.



Rys. 2.2. Model radialny w przestrzeni (a) dwuwymiarowej i (b) trójwymiarowej.  
 Figure 2.2. The radial model in (a) two-dimensional and (b) three-dimensional space.

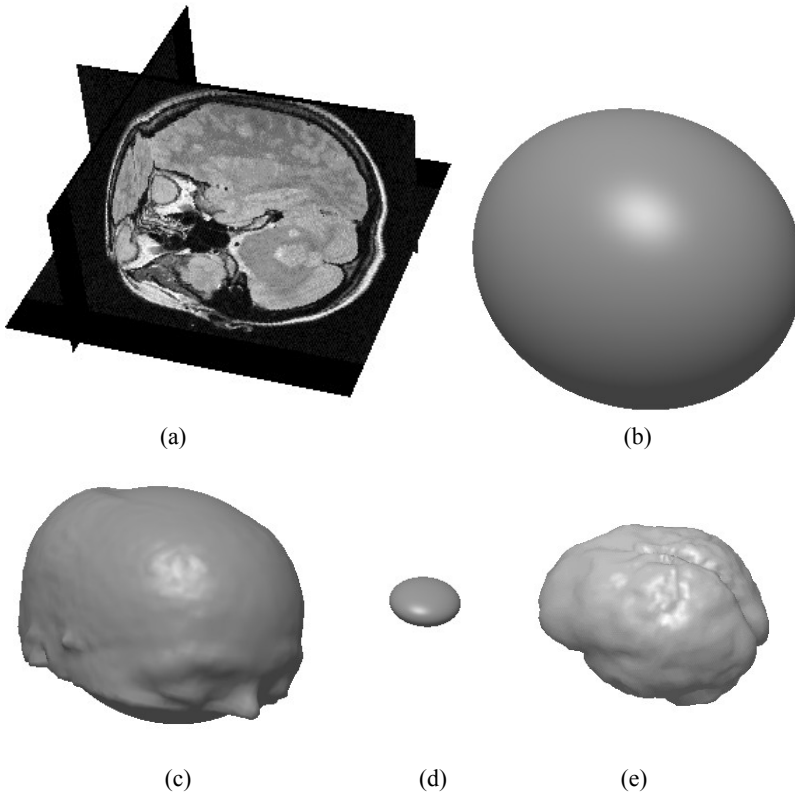


Rys. 2.3. Wyznaczanie ścianki lewej komory serca w obrazie ultrasonograficznym: (a) prawidłowe za pomocą modelu radialnego oraz (b) błędne, z wykorzystaniem filtracji medianowej obrazu, progowania jasności i obliczenia wartości bezwzględnej gradientu.

Figure 2.3. Determination of the left ventricle in an ultrasound image: (a) correct by the radial model and (b) incorrect by means of median filtering, grey-level thresholding and computation of absolute image gradient.

Aby rozwiązać problem zapętlenia się konturu i jednocześnie skrócić czas konieczny do przeprowadzenia minimalizacji funkcjonału energii wewnętrznej zaproponowano aktywny kontur radialny (Rys. 2.2) nazywany również modelem z punktem środkowym [7], [17]. Zaproponowane rozwiązanie polega na wprowadzeniu ograniczenia ruchu węzłów aktywnego konturu. w modelu klasycznym położenie węzła w obrazie dwuwymiarowym określone jest dwiema współrzędnymi, np. w pionie i w poziomie. w procesie minimalizacji energii obie te współrzędne ulegają zmianie. w modelu radialnym ruch węzłów jest ograniczony do jednego

kierunku. Poszczególne węzły poruszają się wyłącznie po półprostych mających swój początek w tzw. punkcie środkowym. Punkt ten wybierany jest arbitralnie w taki sposób aby znajdował się możliwe blisko środka ciężkości wydzielanego obszaru. Półproste, po których mogą przemieszczać się węzły, rozłożone są promieniście, w równych odstępach kątowych. Jest ich tyle ile węzłów i każdy węzeł jest jednoznacznie przyporządkowany do jednej takiej półprostej. Położenie każdego punktu węzłowego w modelu radialnym określone jest przez współrzędną  $r_s$  oznaczającą odległość węzła  $s$  od punktu środkowego.



Rys. 2.4. Dopasowanie modelu radialnego w przestrzeni trójwymiarowej: (a) obraz analizowany, (b, d) wstępny kształt modelu i (c, e) model dopasowany do analizowanych obiektów.

Figure 2.4. Radial model fitting in a three-dimensional space: (a) the analyzed image, (b, d) the initial shape of the model, (c, e) the model fitted to the respective objects.

Współrzędne węzłów w układzie kartezjańskim można obliczyć na podstawie równania (2.1), w którym  $S_m$  oznacza liczbę wszystkich węzłów modelu, natomiast  $x_o$ ,  $y_o$  są współzrędnymi punktu środkowego.

$$\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o + r_s \cos\left(\frac{2\pi s}{S_m}\right) \\ y_o + r_s \sin\left(\frac{2\pi s}{S_m}\right) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

W modelu radialnym kierunek wewnątrz-zewnątrz określony jest dla danego węzła kierunkiem półprostej, po której węzeł ten może się przesuwać. Przesunięcie węzła na zewnątrz powodowane jest przez zwiększenie wartości współrzędnej  $r_s$ , natomiast przesunięcie do wewnątrz zmniejszeniem tej wartości.

W modelu radialnym nie ma też konieczności definiowania i obliczania wartości energii wewnętrznej modelu. Proces dopasowania kształtu konturu przebiega na podstawie prostego algorytmu powodującego przesuwanie węzłów na zewnątrz lub do wewnątrz na podstawie lokalnej jasności obrazu we współrzędnych  $x_s, y_s$  węzła. Wygładzanie konturu, równoważne modelowaniu naprężeń, dokonywane jest za pomocą prostej filtracji dolnoprzepustowej współrzędnych  $r_s$ , za pomocą symetrycznego filtru o skończonej odpowiedzi impulsowej. Równoważność zastosowania takiego filtru w stosunku do metody obliczania naprężeń w modelu aktywnego konturu wykazano w [7].

Model radialny zastosowano z powodzeniem między innymi do segmentacji obrazów ultrasonograficznych (Rys. 2.3). Celem analizy było oznaczenie powierzchni przekrojów lewej komory serca i oszacowanie jej objętości w skurczu i rozkurczu. Zastosowanie modelu radialnego aktywnego konturu umożliwiło rozwiązanie tego problemu. Należy przy tym zwrócić uwagę, że segmentacja obrazów ultrasonograficznych jest trudna ze względu na silne zakłócenia widoczne w obrazie.

Opracowano również model radialny deformowalnej powierzchni trójwymiarowej [17]. w tym przypadku ruch węzłów modelu jest również ograniczony do półprostych o początkach w określonym punkcie wnętrza. w przypadku trzech wymiarów uzyskano znaczące ograniczenie czasu analizy, redukując złożone obliczeniowo zagadnienie trójwymiarowe do problemu jednowymiarowego. Model radialny powierzchni zaimplementowano w programie komputerowym MaZda [18], [19], w którym służy do wyodrębniania obiektów trójwymiarowych w obrazach tomograficznych. Przykłady ewolucji modelu od prostej bryły elipsoidalnej do kształtu odzwierciedlającego granice mózgu lub rysy twarzy przedstawiono na rysunku 2.4.

### 3. OBLICZANIE NAPRĘŻEŃ ZA POMOCĄ SZABLONÓW GEOMETRYCZNYCH

Deformowalny wzorzec [8] umożliwia powiązanie elementów jednego obrazu z odpowiadającymi im elementami znajdującymi się w innym obrazie. Właściwe rozwiązanie tego problemu wymaga znalezienia sensownej transformacji



przestrzennej jednego obrazu, takiej, żeby umiejscowienie elementów w jego przekształconej wersji było takie samo jak umiejscowienie odpowiadających im elementów w drugim obrazie. Omawiany model umożliwia znalezienie takiej transformacji. Dzięki niemu możliwe jest dopasowanie do siebie obrazów w zastosowaniach medycznych, śledzenie ruchu poprzez porównywanie kolejnych obrazów filmu lub rozpoznawanie treści obrazu analizowanego poprzez porównywanie jej z obrazem wzorcowym.

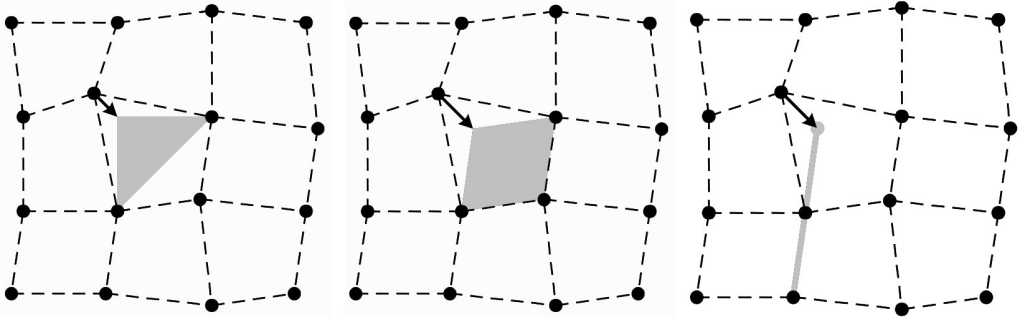
Deformowalny wzorec dyskretny tworzą połączone ze sobą węzły tworzące siatkę – graf planarny. Do każdego węzła przypisana jest pewna lokalna cecha lub wektor cech obrazu wzorcowego przy czym w modelu zachowany jest układ przestrzenny rozkładu tych cech występujący w obrazie wzorcowym. Dopasowanie polega na umieszczeniu modelu w przestrzeni nowego obrazu, a następnie na takiej zmianie współrzędnych poszczególnych węzłów aby znalazły się one tam gdzie lokalne cechy nowego obrazu będą jak najbardziej zbliżone do cech przypisanych.

$$E = \int \int_i (E_e(i, j) + E_i(i, j)) di dj \quad (3.1)$$

$$E_i = \tau \left[ \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial i} \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial j} \right|^2 \right] + \rho \left[ \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial i^2} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial i \partial j} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial j^2} \right|^2 \right] \quad (3.2)$$

Podstawową właściwością deformowalnego wzorca jest zachowanie w czasie analizy wzajemnych relacji przestrzennych pomiędzy węzłami – inaczej mówiąc przeciwstawianie się nadmiernej deformacji siatki modelu. Efekt ten można uzyskać stosując równanie (3.1), i modelując tzw. naprężenia za pomocą równania membrany (3.2). Równania te są podobne do równań (1.1) i (1.3) stosowanych w aktywnym konturze, przy czym zamiast jednego parametru  $s$  krzywej tutaj występują dwa parametry  $i, j$  identyfikujące punkty leżące na powierzchni. O ile jednak zastosowanie równania (1.3) w zamkniętej krzywej nie nastęrczało większych trudności o tyle zastosowanie równania membrany w modelu deformowalnego wzorca jest problematyczne. Nie jest np. możliwe obliczenie pochodnych na brzegach modelu, lub w wersji dyskretnej odpowiednich ilorazów różnicowych dla węzłów brzegowych.

Aby uniknąć problemów z obliczaniem wartości ilorazów różnicowych w węzłach brzegowych zaproponowano alternatywną metodę obliczania naprężeń [8]. Wykorzystuje się w niej wybraną klasę figur geometrycznych – takich, że w siatce niezdeformowanej wierzchołki tych figur pokrywają się z węzłami. Według tej metody, analizuje się położenie danego węzła w taki sposób, że na jego  $k-1$  sąsiednich węzłach opiera się figurę o  $k$  wierzchołkach. Należy to zrobić w taki sposób, żeby  $k$ -ty wierzchołek figury wskazywał przybliżone położenie analizowanego węzła. w przypadku siatki niezdeformowanej wierzchołek figury wyznacza położenie węzła. Jeśli deformacja występuje, wówczas położenie wierzchołka i węzła są różne. Odległość między nimi jest wówczas miarą lokalnej deformacji.



Rys. 3.1. Przykłady szablonów geometrycznych w siatce prostokątnej: (a) prostokątny trójkąt równoramienny, (b) równoległobok oraz (c) odcinek prostej.

Figure 3.1. Examples of geometric templates in a rectangular grid: (a) the isosceles right triangle, (b) the parallelogram, and (c) the straight-line segment.

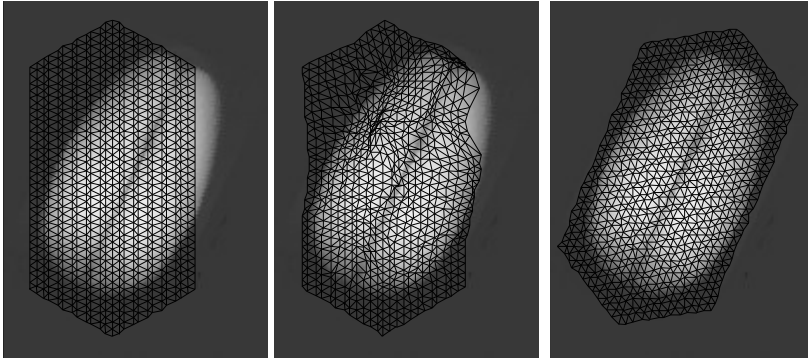
W przypadku siatki prostokątnej o kwadratowych oczkach zaproponowano wykorzystanie trzech rodzajów figur – szablonów geometrycznych: prostokątnego trójkąta równoramiennego, równoległoboku oraz trójkąta równoramiennego o zerowej powierzchni. Rysunek 3.1 pokazuje sposób wykorzystania figur do obliczania miary deformacji związanej w węzle oznaczonym literą  $a$ . Figura opierana jest na węzłach oznaczonych literami  $b$ ,  $c$  i  $d$ . Jej wierzchołek  $a'$  w siatce niezniekształconej powinien pokrywać się z położeniem węzła  $a$ . Jednak ponieważ w przykładowej siatce występuje deformacja to ich położenia różnią się, co oznaczono strzałką.

Należy zwrócić uwagę, że dla każdego z węzłów leżących wewnątrz siatki można skonstruować cztery równoległoboki, cztery trójkąty prostokątne i cztery równoramiennie o zerowej powierzchni. w przypadku węzłów brzegowych takich figur można skonstruować odpowiednio mniej. Deformację wynikową dla danego węzła oblicza się jako ważoną sumę wektorów, każdy o początku w węzle i końcu w odpowiednim wierzchołku figury. w pracy [20] wykazano, że dobierając odpowiednio wagi sumowania dla wektorów wyznaczonych za pomocą różnych figur (szablonów geometrycznych) otrzymuje się równania modelujące naprężenia równoważne równaniu (3.2). Przy czym w metodzie szablonów geometrycznych możliwe jest obliczenie naprężeń w węzłach brzegowych. Wymaga to zastosowania odpowiednio mniejszej liczby szablonów – takich, które daje się utworzyć na sąsiednich węzłach.

W pracy [20] opisano również analogiczną metodę obliczania naprężeń w siatce trójkątnej – wewnętrzne węzły takiej siatki połączone są z sześcioma sąsiadami, a oczka siatki niezdeformowanej mają kształt trójkątów równobocznych. w przypadku takiej siatki jako szablon stosuje się trójkąt równoboczny, trójkąt równoramienny o zerowej powierzchni oraz równoległobok.

Deformowalny wzorec z opisaną tu metodą obliczania naprężeń zastosowano do śledzenia ruchu obiektów oraz do rozpoznawania rodzaju, rzutu i orientacji ziaren

zbóż w obrazach rentgenowskich. Pierwsze z zastosowań wykazało przydatność metody do śledzenia ruchu obiektów, których kształt zmienia się w czasie. w drugim przypadku proponowaną metodę wykorzystano w systemie analizy jakości zbóż pszenicy do rozpoznawania rzutu, wielkości i orientacji ziarniaka oraz oznaczaniu położenia zarodka [1]. Przykładowe obrazy ziarniaków z oznaczeniami będącymi wynikiem analizy za pomocą deformowalnego wzorca przedstawiono na rysunku 3.2.



Rys. 3.2. Zastosowanie deformowalnego wzorca do analizy obrazu rentgenowskiego ziarniaka. Obrazy od lewej do prawej ilustrują kolejne etapy ewolucyjnego dopasowania wzorca do treści rentgenogramu.

Figure 3.2. The deformable grid application to the analysis of X-ray caryopsis image. The images from the left to the right illustrate the successive stages of the model fitting the radiograph content.

#### 4. OBLICZANIE NAPRĘŻEŃ ZA POMOCĄ TRANSFORMACJI SĄSIEDZTWA WĘZŁA

Dotychczas przedstawione metody modelowania naprężeń mają kilka istotnych wad. Pierwsza z nich to brak jednej uniwersalnego algorytmu obliczenia takich naprężeń w różnych modelach. Konieczne jest stosowanie innych równań lub algorytmów w przypadku aktywnego konturu a innych w przypadku sieci deformowalnego wzorca. Zaproponowana w poprzednim rozdziale metoda szablonów geometrycznych wymaga stosowanie różnych szablonów w zależności czy jest to siatka o oczkach kwadratowych czy trójkątnych. Ponadto, w praktyce aby zastosować tę metodę, wszystkie oczka siatki w niezdeformowanej postaci muszą być identyczne. w przeciwnym razie konieczne byłoby dobieranie odmiennych szablonów oddzielnie dla każdego oczka siatki.

Kolejną przeszkodą jest brak możliwości dobierania charakteru modelowanych naprężeń za pomocą parametrów  $\rho$  i  $\tau$  występujących w równaniach (1.3) oraz (3.2). Interpretacja ich wpływu na właściwości modelu nie jest jednoznaczna [11], [12] a możliwości regulacji jakie te parametry dają nie odpowiada potrzebom. Przykładowo, w przypadku dopasowania trójwymiarowych obrazów medycznych, wymagane jest aby transformacja jednego z obrazów nie zmieniała lokalnej objętości.

Wynika to z charakteru deformacji organów wewnętrznych będącej np. wynikiem procesu oddechowego, kiedy to zmiana kształtu niektórych organów nie powoduje znaczącej zmiany w ich objętości. Podobny problem występuje również w metodzie szablonów geometrycznych. Konsekwencją jest to, że ani w przypadku modelowania deformacji równaniem (3.2), ani w przypadku szablonów geometrycznych, zapewnienie odpowiedniego charakteru deformacji (np. niezmienności objętości) nie jest możliwe.

W związku z powyższymi niedoskonałościami istniejących algorytmów opracowano [3] nowy sposób wprowadzenia ograniczeń deformacji wynikających z wiedzy o zależnościach przestrzennych występujących w analizowanym obrazie. Polega on na porównaniu wzajemnego położenia węzłów w siatce modelu deformowalnego z położeniami odpowiadających im węzłów w jej niezdeformowanym odpowiedniku – siatce odniesienia. Podczas takiego porównywania należy przyjąć, że translacja węzłów, obrót siatki, jej równomierne rozciągnięcie lub zmiana wielkości w wielu przypadkach nie powinny być traktowane jako deformacja. Co za tym idzie, jako punkt wyjścia przy projektowaniu algorytmu przyjęto, że wszelkie układy węzłów modelu deformowalnego dające się przedstawić za pomocą transformacji afinicznej odpowiadających im węzłów siatki odniesienia nie są traktowane jako deformacja – nie powodują zwiększenia wartości energii wewnętrznej modelu. Natomiast wszelkie odstępstwa od tego co można uzyskać za pomocą transformacji afinicznej węzłów siatki odniesienia jest deformacją.

Model deformowalny, zdefiniowany jako zbiór węzłów, posiada skończoną liczbę elementów. Dla uproszczenia zapisu przyjęto, że węzły identyfikowane są za pomocą pojedynczego indeksu  $s$ , niezależnie od topologii modelu czy wymiarowości przestrzeni, w której ten model jest zdefiniowany. Współrzędne węzłów w modelu odniesienia, które pozostają niezmiennie, oznaczane są symbolem  $\hat{\mathbf{v}}_s$ , w odróżnieniu od współrzędnych w modelu deformowalnym, opisanych symbolem  $\mathbf{v}_s$ . w czasie analizowania obrazu poszczególne węzły przesuwały się – w ogólnym przypadku ich współrzędne  $\mathbf{v}_s^{(i)}$  zmieniają się w kolejnych krokach ( $i$ ) dopasowania.

Dla każdego węzła  $s$  definiuje się jego sąsiedztwo  $H_s$ , którym jest pewien podzbiór innych węzłów modelu, leżących w jego pobliżu, obejmujący również ten węzeł. Sąsiedztwo każdego z węzłów może być określane w sposób arbitralny. Istotne jest natomiast, żeby w skład każdego sąsiedztwa wchodziły przynajmniej trzy punkty węzłowe o współrzędnych niezależnych liniowo w przestrzeni dwuwymiarowej lub cztery takie punkty w przestrzeni trójwymiarowej. Wynika to stąd, że mniejsza liczba węzłów nie umożliwia obliczenia parametrów transformacji afinicznej w sposób jednoznaczny.

Położenie węzłów wchodzących w skład sąsiedztwa  $H_s$  można, z pewnym błędem, przedstawić jako transformatę afiniczną współrzędnych tych węzłów w modelu odniesienia. Innymi słowy, dla każdego sąsiedztwa można określić stopień jego przesunięcia, obrotu, rozciągnięcia i przeskalowania w stosunku do

odpowiadającego mu sąsiedztwa w modelu odniesienia. Transformacja afiniczna jest określona za pomocą macierzy transformacji  $\mathbf{J}_s$  oraz wektora przesunięcia  $\mathbf{T}_s$ . Równanie wiążące współrzędne punktu węzłowego  $k$  należącego do sąsiedztwa  $H_s$  modelu deformowalnego z odpowiadającym mu punktem modelu odniesienia ma więc postać (4.1), przy czym występuje tu pewien błąd  $\mathbf{e}_k$  obliczonych w ten sposób współrzędnych węzła  $k$ .

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{J}_s \hat{\mathbf{v}}_k + \mathbf{T}_s + \mathbf{e}_k; \quad i \in H_s \quad (4.1)$$

Macierz transformacji i wektor przesunięcia obliczane są tak by uzyskać minimalną wartość średniokwadratową (4.2) tego błędu dla wszystkich węzłów należących do analizowanego sąsiedztwa  $H_s$

$$\varepsilon_s = \sum_{k \in N_s} |e_k|^2 = \sum_{k \in H_s} \left| \mathbf{v}_k - (\mathbf{J}_s \hat{\mathbf{v}}_k + \mathbf{T}_s) \right|^2 \quad (4.2)$$

Wielkość  $\varepsilon_s$  jest funkcją elementów macierzy  $\mathbf{J}_s$  oraz wektora  $\mathbf{T}_s$ . Funkcja ta ma jedno minimum występujące w przypadku, w którym jej pochodne względem każdego z argumentów są równe zero. Tak więc, aby znaleźć macierz  $\mathbf{J}_s$  oraz wektor  $\mathbf{T}_s$  minimalizujące funkcje błędu  $\varepsilon_s$ , należy rozwiązać układ równań składających się z pochodnych tej funkcji odpowiednio względem poszczególnych elementów macierzy  $\mathbf{J}_s$  i wektora  $\mathbf{T}_s$ , przyrównanych do zera. w [21], [22] podano rozwiązanie tego zagadnienia.

Jeśli w danym sąsiedztwie  $H_s$  nie występuje deformacja to wielkości  $\mathbf{e}_k$  są równe zero. w szczególności dotyczy to też błędu  $\mathbf{e}_k$  obliczanego dla węzła  $s$  przy  $k = s$ . Jeśli natomiast występuje lokalna deformacja w węzle  $s$ , wówczas wielkość  $\mathbf{e}_k$  jest różna od zera i tym większy im większy jest stopień tej deformacji. Stąd, w proponowanej metodzie przyjęto, że to właśnie wielkość  $\mathbf{e}_k$  dla  $k = s$  jest miarą deformacji modelu w węzle  $s$ .

W proponowanej metodzie energię cząstkową naprężeń w węzle  $s$  definiuje się równaniem (4.3). Jest ona proporcjonalna do kwadratu odległości pomiędzy rzeczywistym położeniem  $\mathbf{v}_s$  węzła a transformatą afiniczną jego położenia w modelu odniesienia. Transformacja afiniczna jest obliczona dla sąsiedztwa tego węzła, zaś  $\rho$  jest parametrem i określa udział energii naprężeń w całkowitej energii modelu deformowalnego.

$$E_i(s) = \rho \left| \mathbf{v}_s - (\mathbf{J}_s^* \hat{\mathbf{v}}_s + \mathbf{T}_s^*) \right|^2 \quad (4.3)$$

Występujące w równaniu macierz  $\mathbf{J}^*$  i wektor  $\mathbf{T}^*$  są wynikiem modyfikacji macierzy  $\mathbf{J}$  i wektora  $\mathbf{T}$ , której celem jest wprowadzenie dodatkowych ograniczeń deformacji, np. wspomnianego ograniczenia związanego z niezmiennością pola powierzchni lub objętości. Dla uproszczenia modyfikacja ta zostanie przedstawiona dla przypadku dwuwymiarowego, przy czym dla przypadku trójwymiarowego jest ona analogiczna.

Macierz  $\mathbf{J}$  można poddać dekompozycjom, rozkładowi biegunowemu [23], którego wynikiem jest iloczyn macierzy  $\mathbf{U}$  (ortonormalnej) i  $\mathbf{S}$  (symetrycznej), następnie macierz  $\mathbf{S}$  rozkładowi własnemu [24] na iloczyn macierzy  $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{Q}$  gdzie  $\mathbf{Q}$  jest macierzą ortonormalną a  $\mathbf{D}$  dodatnio określoną diagonalną macierzą wartości własnych. Ponadto, w wyniku wyłączenia pierwiastka wyznacznika macierzy  $\mathbf{D}$  otrzymuje się równanie (4.4).

$$\mathbf{J} = \mathbf{U} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{Q} = \sqrt{\det \mathbf{D}} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Parametry  $\lambda$  są wartościami własnymi macierzy  $\mathbf{D}$ , ich iloczyn jest równy jedności, a proporcje między nimi określają stopień rozciągnięcia kierunkowego. Kierunek, w którym model jest rozciągnięty, dany jest kątem  $\beta$ . Kąt  $\alpha$  jest kątem obrotu modelu deformowalnego w stosunku do modelu odniesienia. Pierwiastek wyznacznika macierzy  $\mathbf{D}$  określa powiększenie względem siatki odniesienia.

W równaniu (4.3), służącym do obliczenia energii naprężeń, występuje macierz  $\mathbf{J}^*$  oraz wektor  $\mathbf{T}^*$  dane równaniami (4.5) i (4.6).

$$\mathbf{J}^* = \mathbf{A}^* \begin{bmatrix} \cos \alpha^* & \sin \alpha^* \\ -\sin \alpha^* & \cos \alpha^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta^* & -\sin \beta^* \\ \sin \beta^* & \cos \beta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^* & 0 \\ 0 & \lambda_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta^* & \sin \beta^* \\ -\sin \beta^* & \cos \beta^* \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{T}^* = \rho_T \mathbf{T} \quad (4.6)$$

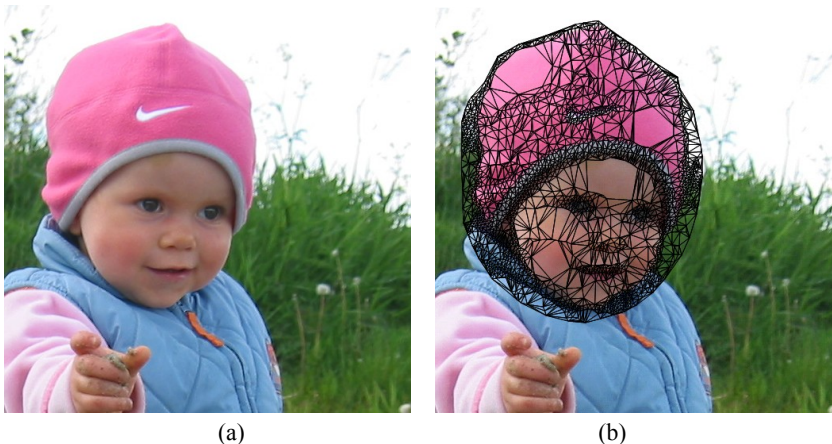
$$\mathbf{A}^* = (\sqrt{\det \mathbf{D}})^{\rho_A}; \quad \alpha^* = \rho_R \alpha; \quad \lambda_1^* = \lambda_1^{\rho_S}; \quad \lambda_2^* = \lambda_2^{\rho_S} \quad (4.7)$$

Odpowiednie elementy macierzy występujących w równaniu (4.4) oraz wektora  $\mathbf{T}$  są modyfikowane za pomocą parametrów  $\rho_A, \rho_R, \rho_S$  (4.7) i  $\rho_T$  (4.6). Parametry te dobiera się w zakresie od zera do jedności, a ich wartości określają udział danego komponentu lub współczynnika w wynikowej transformacji. Parametr  $\rho_A$  jest odpowiedzialny za skalowanie,  $\rho_R$  za obrót,  $\rho_S$  za rozciągnięcie, natomiast  $\rho_T$  za przemieszczenie. Przykładowo, aby wprowadzić ograniczenie deformacji związane z niezmiennością pola powierzchni (lub objętości w trzech wymiarach) należy użyć parametru  $\rho_A$  równego zero.

Metodę obliczania naprężeń za pomocą transformacji sąsiedztwa węzła zastosowano po raz pierwszy w algorytmie deformowalnych pierścieni [3], [22] do analizy ruchu własnego kapsułki endoskopu bezprzewodowego. Metoda może być również z powodzeniem wykorzystywana w modelu deformowalnego wzorca, w siatkach o arbitralnym rozkładzie i połączeniach węzłów (Rys 4.1), a także w aktywnych konturach i powierzchniach deformowalnych. Zestaw parametrów umożliwia intuicyjne dostosowanie ograniczeń związanych z deformacją modelu do

konkretnego zastosowania, w tym pozwala ograniczyć podatność na przesunięcie, obrót, rozciąganie oraz zmianę pola powierzchni lub objętości.

Zastosowanie metody transformacji sąsiedztwa węzła w przypadku aktywnego konturu umożliwia arbitralne definiowanie oczekiwanego kształtu konturu. Rozwiązania stosowane do tej pory powodują, że model konturu ma tendencję do przyjmowania kształtu okręgu, co w wielu przypadkach jest niewłaściwe. Nowa metoda umożliwia w sposób naturalny uwzględnienie w modelu pewnej wiedzy a-priori, np. w obrazach medycznych wynikającej ze znajomości anatomii analizowanego organu.



Rys 4.1. Siatka wzorca o dobranym rozkładzie węzłów, w której naprężenia modelowane są za pomocą metody transformacji sąsiedztwa: (a) obraz oryginalny, (b) siatka o węzłach umieszczonych w punktach charakterystycznych.

Figure 4.1. A deformable grid of specifically chosen nodes arrangement, wherein the tensions are modeled by the neighborhood transformation method: (a) original image, (b) a mesh with nodes located at the image keypoints.

## 5. PODZIAŁ DOPASOWANIA NA ETAPY

Jednym z kluczowych zagadnień w przetwarzaniu obrazów biomedycznych jest dopasowanie do siebie treści dwóch obrazów. Obrazy takie zazwyczaj pokazują to samo miejsce, które zostało zobrazowane w różnym czasie albo za pomocą różnych technik. w zależności od potrzeb stosowane są dwa opcjonalne podejścia – dopasowanie sztywne (ang. *rigid*) lub elastyczne (ang. *non-rigid*) [4]. w pierwszym przypadku dopasowanie polega jedynie na przesunięciu i obróceniu jednego z obrazu w taki sposób aby treści obu obrazów pokrywały się przy minimalnym błędzie. w drugim przypadku jeden z obrazów jest ponadto geometrycznie zniekształcany w celu dopasowania detali obu obrazów. Pierwsze podejście pozwala uzyskać jedynie zgrubne wyniki w krótkim czasie, podczas gdy drugie generuje dokładniejsze wyniki ale wymaga znacznie dłuższego czasu.

W przypadku modeli deformowalnych można, za pomocą doboru parametrów, uzyskać efekty analogiczne zarówno do dopasowania sztywnego jak i elastycznego. Podobnie jak w przypadku innych metod, użycie sztywnej siatki daje zgrubne wyniki dopasowania ale nie wymaga długiego czasu, natomiast użycie siatki elastycznej, podatnej na deformacje prowadzi do dokładniejszego dopasowania ale jest długotrwałe. Okazuje się jednak, że możliwe jest uzyskanie dokładnego dopasowania w stosunkowo krótkim czasie. Rozwiązaniem jest podział procesu minimalizacji energii modelu na etapy. w pierwszym z nich wykorzystuje się siatkę sztywną, uzyskując zgrubne dopasowanie, a następnie zmienia się parametry modelu zwiększając jego elastyczność i kontynuuje się proces optymalizacji uzyskując dopasowanie szczegółów obrazu. Drugi etap optymalizacji rozpoczyna się od punktu startowego, który jest stosunkowo blisko rozwiązania końcowego. Dzięki temu część optymalizacji, w której wykorzystywana jest elastyczna wersja modelu zajmuje niewiele czasu.

Metodę podziału dopasowania na etapy zaproponowano w odniesieniu do deformowalnego wzorca, w którym naprężenia obliczano za pomocą szablonów geometrycznych [8]. w [3] opisano zastosowanie takiego podziału w stosunku do modelu, w którym naprężenia obliczane są za pomocą transformacji sąsiedztwa węzła. w obu przypadkach uzyskano kilkunastokrotne przyśpieszenie dopasowania modelu do analizowanego obrazu.

W metodzie transformacji sąsiedztwa możliwe jest regulowanie zasięgu oddziaływań naprężeń poprzez dobór wielkości sąsiedztwa. Wielkość tego sąsiedztwa ma istotny wpływ na sposób, w jaki model przeciwstawia się niepożądanym zniekształceniom. Wybór małego sąsiedztwa powoduje, że korygowane są lokalne zniekształcenia, natomiast zmiany kształtu o globalnym charakterze są możliwe. w dużym sąsiedztwie zasięg modelowanych naprężeń staje się większy. w ekstremalnym przypadku sąsiedztwem każdego węzła mogą być wszystkie pozostałe węzły modelu – odpowiada to sztywnemu dopasowaniu obrazów.

W metodzie modelowania naprężeń z wykorzystaniem transformacji sąsiedztwa obliczane są macierze  $\mathbf{J}_s$  i wektory  $\mathbf{T}_s$  dla sąsiedztwa każdego punktu węzłowego  $s$  należącego do modelu. Do ich obliczenia konieczne jest wykonanie pewnej liczby sumowań i mnożeń proporcjonalnej do iloczynu liczby wszystkich punktów węzłowych oraz średniej liczby węzłów w ich sąsiedztwach. Koszt obliczeniowy algorytmu zwiększa się więc wraz ze wzrostem wielkości sąsiedztwa. Jeśli jednak sąsiedztwo każdego węzła obejmuje wszystkie pozostałe węzły modelu, wówczas nie jest już konieczne obliczanie parametrów transformacji dla każdego z węzłów indywidualnie. Wystarczy obliczyć parametry transformacji jednokrotnie w pojedynczym kroku procesu dopasowania. w takim przypadku nakład obliczeniowy znacznie się zmniejsza.

W algorytmie z podziałem dopasowania na etapy korzysta się z tej właściwości. w pierwszym etapie model dopasowywany jest z sąsiedztwem obejmującym wszystkie węzły, jako całość przesuwana się on, zmienia swe położenie, orientację i ew.

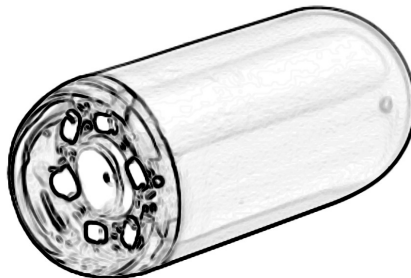


wielkość. Po tym etapie uzyskuje się przybliżone dopasowanie modelu do analizowanego obrazu. w drugim etapie przyjmuje się odpowiednio małe sąsiedztwo, czego efektem jest lokalna deformacja i dopasowanie modelu do szczegółów obrazu.

Zaobserwowano jeszcze jedną pozytywną właściwość podziału dopasowania na etapy. w przypadku zastosowania elastycznego modelu, bez wstępnego dopasowania jego sztywnej wersji, występowały przypadki błędnego dopasowania. Było to efektem występowania zbyt wielu lokalnych minimów funkcji celu (energii modelu). Jedno z takich właśnie minimów było znajdowane w procesie minimalizacji. w przypadku siatki sztywnej takie lokalne minima występują w mniejszej liczbie co zwiększa szanse uzyskania oczekiwanego rozwiązania.

## 6. ZASTOSOWANIE W ANALIZIE OBRAZÓW ENDOSKOPOWYCH

Modele deformowalne są narzędziami, które służą rozwiązaniu konkretnych problemów z dziedziny przetwarzania i analizy obrazów. Należy jednak zauważyć, że różnorodność technik obrazowania oraz pojawiające się specyficzne potrzeby wymagają opracowania szczególnych rozwiązań. Dotyczy to w szczególności modeli deformowalnych, których topologię, metodę obliczania wpływu obrazu oraz sposób modelowania naprężeń można i należy dobrać w zależności od potrzeb. Należy zauważyć, że modele deformowalne znalazły szerokie zastosowanie między innymi we wspomaganiu obrazowej diagnostyki medycznej gdzie występuje szczególnie duża różnorodność sposobów obrazowania. Przykładem modelu zaprojektowanego w celu rozwiązania konkretnego zagadnienia są deformowalne pierścienie [3], [22], których zadaniem jest wspomaganie diagnostyki medycznej przewodu pokarmowego na podstawie danych uzyskiwanych z endoskopu bezprzewodowego.



Rys. 6.1. Kapsułka endoskopu bezprzewodowego.

Figure 6.1. The wireless endoscope capsule.

Bezprzewodowa endoscopia kapsułkowa (ang. *Wireless Capsule Endoscopy* – WCE) [25]–[27], znana również jako endoscopia kapsułkowa lub endoscopia bezprzewodowa, jest stosunkowo mało inwazyjną techniką obrazowania wizyjnego jelita cienkiego. Umożliwia ona uzyskanie obrazów wizyjnych całego układu pokarmowego, w tym również jelita cienkiego. Jej niewątpliwą zaletą jest niewielka

uciążliwość dla pacjenta, gdyż wymaga połknięcia niewielkiej kapsułki (średnicy ok. 11 mm i długości 26 mm) z wbudowaną kamerą, co jest znacznie mniej uciążliwe niż poddanie się badaniu enteroskopowemu.

System endoskopii bezprzewodowej obejmuje kapsułkę z wbudowaną kamerą (Rys. 6.1), diodowym źródłem światła białego, nadajnikiem sygnału wizyjnego oraz źródłem zasilania. Ponadto w jego skład wchodzi odbiornik-rejestrator, system anten odbiorczych montowanych na ciele pacjenta oraz komputer z oprogramowaniem do analizy otrzymanego filmu. Kapsułka uruchamia się automatycznie w chwili wyjęcia jej z opakowania. Po połknięciu przemieszcza się ona w przewodzie pokarmowym w sposób naturalny, podobnie jak pokarm, wykorzystując naturalne ruchy układu trawiennego. w dostępnych na rynku urządzeniach nie stosuje się mechanizmów napędowych, czy też jakiegokolwiek sterowania przemieszczaniem lub orientacją endoskopu.

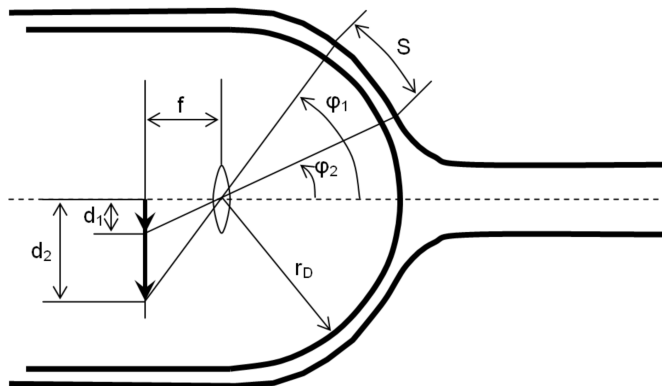
Podczas analizowania filmu uzyskanego za pomocą kapsułki lekarz używa komputera ze specjalistycznym oprogramowaniem, które umożliwia odtwarzanie zarejestrowanego filmu z różnymi prędkościami, zatrzymywanie go oraz cofanie; oznaczanie charakterystycznych miejsc przewodu pokarmowego; a także wskazywanie obrazów z odnalezionymi zmianami chorobowymi. Tak prowadzona analiza jest zadaniem żmudnym i zajmującym zazwyczaj kilka godzin. Co gorsza, dopiero po obejrzeniu całości nagrania gastroenterolog może w pełni ocenić jego jakość i stopień przydatności do celów diagnostycznych. Brakuje automatycznych narzędzi do automatycznego wykrywania obrazów ze zmianami chorobowymi a ilościowa analiza rozległych zmian, której wyniki stanowią kluczowy czynnik decydujący o sposobie leczenia, także nie jest wspomagana automatycznie. Ponadto, niewystarczające są też informacje dotyczące lokalizacji kapsułki w ciele pacjenta.

Jeśli założyć wykorzystanie endoskopu kapsułkowego o typowej budowie bez wprowadzania w nim zmian konstrukcyjnych to powyższe problemy można rozwiązać jedynie za pomocą dedykowanych metod numerycznych przetwarzania i analizy obrazów. Jednym z takich rozwiązań są właśnie deformowalne pierścienie – oryginalny model deformowalny, który analizuje i opisuje ruch kapsułki względem ścian przewodu pokarmowego oraz tworzy pojedynczy obraz będący reprezentacją (mapą) powierzchni wewnętrznej całego przewodu pokarmowego.

Rozwiązanie problemu ruchu własnego kamery polega na odnalezieniu w dwóch kolejnych obrazach filmu tych samych charakterystycznych punktów sceny. w klasycznym podejściu zakłada się, że kamera porusza się w przestrzeni trójwymiarowej w nieruchomym środowisku. Jeśli znane są właściwości układu optycznego, przesunięcia charakterystycznych punktów sceny w czasie oraz ich odległości od kamery to można sformułować równania, w których niewiadomymi są trójwymiarowy wektor przesunięcia i trzy kąty obrotu kamery – sześć stopni swobody ruchu kamery. Rozwiązanie tych równań prowadzi do opisu ruchu kamery względem sceny w sposób ilościowy.

W przypadku endoskopu bezprzewodowego problem estymacji ruchu własnego jest jednak bardziej złożony, ponieważ środowisko, w którym porusza się kamera, nie jest nieruchome. w wyniku skurczy jelit powierzchnia przewodu pokarmowego porusza się i zmienia swój kształt. Nie są też znane odległości pomiędzy punktami sceny i nie jest możliwe zmierzenie odległości pomiędzy punktem sceny a kamerą. Ponadto, kolejne obrazy filmu, w wyniku występowania intensywnych skurczów mieszających pokarm, mogą przedstawiać zupełnie inne fragmenty przewodu pokarmowego, w których będzie tych samych punktów charakterystycznych.

Rozwiązanie zagadnienia analizy ruchu kapsułki endoskopowej wymaga więc sformułowania dodatkowych założeń upraszczających. w zaproponowanym modelu ruchu zakłada się, że kapsułka utrzymuje określoną orientację względem otaczającego ją środowiska, z czego wynikają ograniczenia dotyczące stopni swobody jej ruchu. Ponadto, zakłada się, że przewód pokarmowy, w którym porusza się endoskop bezprzewodowy charakteryzuje się określonym kształtem, rozmiarami oraz właściwościami mechanicznymi.



Rys. 6.2. Uproszczony model rzutowania obrazu w endoskopie bezprzewodowym przy założeniu określonej średnicy i kształtu przewodu pokarmowego.

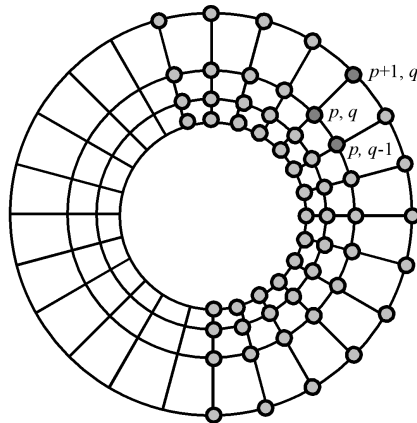
Figure 6.2. Simplified image projection model in wireless endoscope assuming particular diameter and shape of the gastrointestinal tract.

Ze względu na wydłużony kształt kapsułki i stosunkowo małe światło jelita cienkiego, które zaciska się wokół niej, przez większość czasu jej orientacja jest zgodna z kierunkiem przebiegu jelita (Rys. 6. 2). Skurcze perystaltyczne powodują przepychanie kapsułki w kierunku zgodnym z przebiegiem przewodu pokarmowego, przy czym biorąc pod uwagę konstrukcję endoskopu również oś kamery jest z nim zgodna. w rzeczywistości, w wyniku pofałdowania powierzchni przewodu pokarmowego i ruchów mieszających, endoskop może się ustawić skośnie lub poprzecznie do kierunku ruchu, przyjmuje się jednak, że taka orientacja jest krótkotrwała i występuje stosunkowo rzadko.

Powiązanie prędkości przemieszczania się endoskopu z ruchem w obrazie przyjmując, że ściany przewodu pokarmowego ściśle przylegają do obudowy kapsułki, dane jest równaniem (6.1). Przyjęto, że średnica przewodu jest równa średnicy ( $2r_D$ ) kapsułki endoskopu. Odległość  $S$  kapsułki od punktu na powierzchni przewodu pokarmowego jest w tym przypadku odwrotnie proporcjonalna do odległości  $d$  obrazu tego punktu od środka powierzchni przetwornika, przy czym  $f$  jest ogniskową obiektywu kamery.

$$V_p = \frac{r_D f}{\Delta t} \left( \frac{1}{d_t} - \frac{1}{d_{t-\Delta t}} \right) \quad (6.1)$$

Wielkość  $d_t$  jest odległością obrazu punktu przewodu pokarmowego mierzoną od środka powierzchni przetwornika w chwili  $t$ . Wielkość  $d_{t-\Delta t}$  jest odległością obrazu tego samego punktu mierzoną w czasie  $t - \Delta t$  a  $\Delta t$  jest czasem pomiędzy uzyskaniem dwóch kolejnych obrazów filmu.



Rys. 6.3. Budowa modelu złożonego z deformowalnych pierścieni.

Figure 6.3. Outline of the model made of deformable rings.

Do obliczania charakterystyki ruchu kapsułki z wykorzystaniem zaproponowanego modelu ruchu i równania (6.1) zaproponowano dedykowany model deformowalny. Węzły modelu określone są nim parą indeksów  $p = 1, 2, \dots, P$  oraz  $q = 1, 2, \dots, Q$ . Wraz z połączeniami tworzą one graf planarny o kształcie koncentrycznych pierścieni (Rys. 6.3), umieszczony w dwuwymiarowej przestrzeni analizowanego obrazu. Współrzędne węzłów po zainicjowaniu dane są równaniem (6.2), przy czym parametr  $r$  występujący w tym równaniu jest promieniem wewnętrznego pierścienia, zaś parametr  $w$  jest stosunkiem promieni dwóch sąsiednich pierścieni, większego do mniejszego.

$$\hat{\mathbf{v}}_{pq} = [\hat{x}_{pq} \ \hat{y}_{pq}]^T = r w^{p-1} \left[ \cos\left(\frac{2\pi q}{Q}\right) \ \sin\left(\frac{2\pi q}{Q}\right) \right]^T \quad (6.2)$$

Przyjęto, że początek układu współrzędnych znajduje się w środku analizowanego obrazu a parametry  $r$  i  $w$  są tak dobrane, aby zmieścić model wewnątrz pola widzenia kamery endoskopu z zachowaniem pewnego marginesu dookoła. Potrzeba zapewnienia tego marginesu wynika stąd, że w czasie procesu dopasowania, punkty węzłowe mogą zmieniać swoje położenie, siatka może ulegać deformacjom, w tym może się powiększać.

Podstawową zasadę działania modelu można opisać w następujący sposób: dla każdego węzła zapamiętywane są lokalne charakterystyki obrazu występujące w jego aktualnym położeniu. Po zmianie obrazu na kolejny, węzły poszukują takich miejsc, których charakterystyki są najbardziej zbliżone do zapamiętanych. w wyniku tych poszukiwań węzły przesuwają się w stronę tych miejsc, przy czym ich ruch jest do pewnego stopnia ograniczony przez naprężenia – narzucone ograniczenia dotyczące zmiany kształtu siatki. Wraz z zakończeniem ruchu węzłów zapamiętywane są lokalne charakterystyki aktualnego obrazu i procedura zostaje powtórzona dla kolejnych obrazów sekwencji wideo.

Ruch punktów węzłowych jest wynikiem minimalizacji energii danej równaniem (6.3). Składnikami energii cząstkowych są energie wpływu obrazu na położenie węzła  $M_{pq}$  oraz energie naprężeń (korekcji kształtu)  $E_{pq}$ . Energia MDR jest funkcją współrzędnych wszystkich punktów węzłowych modelu. Model znajduje się w przestrzeni dwuwymiarowej, więc liczba zmiennych tej funkcji jest dwukrotnie większa od liczby wszystkich punktów węzłowych i jest równa  $2PQ$ .

$$E_{MDR} = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q (M_{pq} + E_{pq}) \quad (6.3)$$

Dopasowanie modelu polega na takiej zmianie współrzędnych  $x$  i  $y$  wszystkich węzłów  $pq$ , aby zminimalizować wartość funkcji celu  $E_{MDR}$ . Do optymalizacji tej funkcji zastosowano minimalizację gradientową (6.4). w metodzie tej, dla określonego wektora zmiennych  $\mathbf{X}^{(i)}$  (wektor zawiera współrzędne wszystkich węzłów) obliczany jest gradient funkcji. Indeks ( $i$ ) oznacza numer kolejnego przybliżenia (iteracji) procedury optymalizacji. Następnie od wektora  $\mathbf{X}^{(i)}$  odejmowana jest wartość proporcjonalna do obliczonego wektora gradientu (6.5). Dla wynikowego wektora  $\mathbf{X}^{(i+1)}$  ponownie obliczany jest gradient minimalizowanej funkcji. Procedura ta jest powtarzana wielokrotnie, aż do uzyskania odpowiednio małej wartości bezwzględnej wektora gradientu lub do wykonania założonej liczby powtórzeń.

$$\mathbf{X}^{(i+1)} = \mathbf{X}^{(i)} - \nabla E_{MDR}(\mathbf{X}^{(i)}) \quad (6.4)$$

$$\nabla E_{MDR} = \nabla \left( \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q (M_{pq} + E_{pq}) \right) = \left( \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q (\nabla M_{pq} + \nabla E_{pq}) \right) \quad (6.5)$$

W celu skrócenia czasu koniecznego do przeprowadzenia powyższej minimalizacji przyjęto uproszczenie dotyczące przybliżonego wyznaczania gradientu funkcji. Można zauważyć, że gradient wielkości  $M_{pq}$  zależy wyłącznie od położenia węzła  $p q$  i nie zależy od położenia pozostałych węzłów. Wpływ obrazu na węzły może być więc obliczony indywidualnie dla każdego węzła. Wartość gradientu  $E_{pq}$  zależy natomiast nie tylko od współrzędnych punktu węzłowego  $p, q$ , ale również od współrzędnych innych węzłów, z którymi węzeł  $p q$  pozostaje w interakcji. Można jednak przyjąć, że istotny wpływ na wektor gradientu energii  $E_{pq}$  mają wyłącznie współrzędne węzła  $p q$ , a współrzędne węzłów pozostających z nim w interakcji mają wpływ możliwy do pominięcia. Przy takim uproszczeniu równanie gradientu funkcji energii można zapisać w postaci (6.6). Symbolami  $x_{pq}^o$  oraz  $y_{pq}^o$  oznaczono wersory w kierunkach wyznaczonych przez osie odpowiednich współrzędnych.

$$\nabla E_{MDR} \approx \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \left( x_{pq}^o \frac{\partial M_{pq}}{\partial x_{pq}} + y_{pq}^o \frac{\partial M_{pq}}{\partial y_{pq}} + x_{pq}^o \frac{\partial E_{pq}}{\partial x_{pq}} + y_{pq}^o \frac{\partial E_{pq}}{\partial y_{pq}} \right) \quad (6.6)$$

Ta uproszczona formuła, w której zmienne będące współrzędnymi węzła  $p, q$  modyfikowane są wyłącznie na podstawie cząstkowych pochodnych wielkości  $M_{pq}$  i  $E_{pq}$ , zależnych – jak się uznaje – wyłącznie od współrzędnych węzła  $p q$ , pozwala wielokrotnie skrócić czas potrzebny do obliczenia gradientu funkcji  $E_{MDR}$ . Podczas prowadzonych eksperymentów nie stwierdzono, aby uproszczenie to miało istotny wpływ na zbieżność procesu optymalizacji.

Do obliczania składowej  $E_{pq}$  związanej z modelowaniem naprężeń zastosowano opisaną wcześniej metodę transformacji sąsiedztwa, przy czym współrzędne węzłów w siatce odniesienia dane są równaniem (6.2). Ograniczono przy tym swobodę modelu do przesuwania się poza obszar obrazu ustalając parametr  $\rho_T$  na mniejszy od jedności. Ponadto, ograniczono możliwość kierunkowego rozciągania modelu poprzez ustalenie wartości parametru  $\rho_s$  również poniżej jedności. Rozważania dotyczące doboru wartości parametrów metody transformacji sąsiedztwa w zastosowaniu do deformowalnych pierścieni zamieszczono w publikacji [22].

Składowa wpływu obrazu  $M_{pq}$  jest natomiast obliczana za pomocą równania (6.7) jako średnia różnic bezwzględnych (ang. *mean absolute difference* – MAD) rozkładów jasności w otoczeniu węzła w aktualnie analizowanym obrazie oraz w poprzednio analizowanym obrazie po zakończeniu procesu dopasowania.

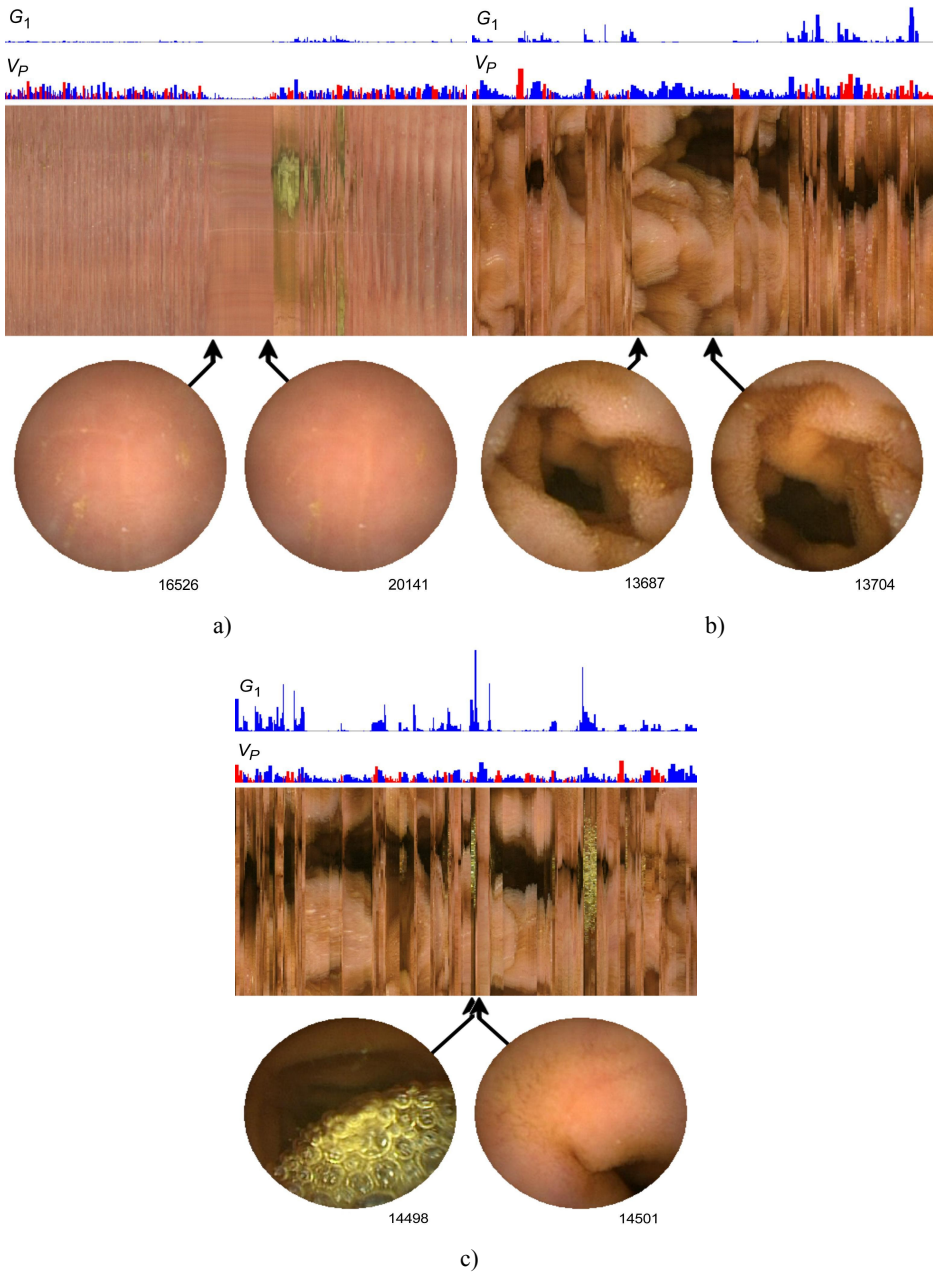
$$\text{MAD}(x, y) = \frac{1}{N^2} \sum_{m=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \left| I_t(x+m, y+n) - I_{t-\Delta t}(x_{t-\Delta t}+m, y_{t-\Delta t}+n) \right| \quad (6.7)$$

Miarę MAD stosowaną do kompensacji liczona jest pomiędzy dwoma blokami  $N \times N$  pikseli. Pierwszy z bloków jest konstruowany na podstawie poprzedniego obrazu uzyskanego w czasie  $t - \Delta t$  we współrzędnych  $[x_{t-\Delta t}, y_{t-\Delta t}]^T$ , drugi zaś powstaje z użyciem obrazu uzyskanego w czasie  $t$  we współrzędnych  $[x_t, y_t]^T$ . Parametr  $N$  w przypadku omawianego modelu deformowalnego jest liczbą naturalną nieparzystą, a funkcja  $I(\cdot)$  reprezentuje jasność obrazu we współrzędnych  $x, y$ . Dla porównania w publikacji [14] przeprowadzono dyskusję dotyczącą zastosowania innych miar definiujących składową  $M_{p,q}$ .

W wyniku analizy filmu za pomocą deformowalnych pierścieni obliczanych jest kilka różnych deskryptorów ruchu. Są to między innymi estymata prędkości  $V_p$  (6.1), miara globalnej deformacji modelu  $G_l$  obliczana jako średnia składowej energii  $E_{p,q}$ , miara różnicy dwóch kolejnych obrazów filmu obliczana jako średnia składowej energii  $M_{p,q}$ , oraz prędkość kątową  $\omega$  obrotu kapsułki wokół jej osi podłużnej. w wyniku analizy dyskryminacyjnej wykazano, że wartości tych deskryptorów te umożliwiają rozróżnianie faz pracy jelit, w tym fazy spoczynku oraz intensywności skurczów jelit. Przykładowo, znaczne wartości estymaty prędkości świadczą o występowaniu skurczów przepychających pokarm, natomiast znaczne wartości deformacji oznaczają występowanie skurczów mieszających. Zależność tę wykorzystano do automatycznego sterowania szybkością odtwarzania filmu podczas jego oglądania przez lekarza.

Lekarz dokonujący oceny diagnostycznej materiału stara się przeglądać fragmenty uzyskane w fazie odpoczynku jelita w przyspieszonym tempie, te uzyskane podczas skurczy perystaltycznych zazwyczaj ogląda z mniejszą szybkością odtwarzania, natomiast uzyskane podczas skurczy mieszających ogląda uważnie „klatka po klatce”. w przypadku, w którym po fazie bezruchu następują skurcze mieszające, lekarz nie jest w stanie wystarczająco szybko zareagować i musi zatrzymać odtwarzanie, aby przewinąć film wstecz, do chwili, w której następuje gwałtowna zmiana widoku z kamery. Należy przyznać, że ten sposób pracy z materiałem diagnostycznym wymaga ciągłego skupienia uwagi, co w konsekwencji jest bardzo męczące. Automatyczny dobór prędkości odtwarzania filmu jest więc istotnym elementem wspomaganego procesu diagnostycznego.

Kolejnym sposobem w jaki opisany model deformowalny wspomaga diagnostykę przewodu pokarmowego jest utworzenie pojedynczego obrazu przedstawiającego powierzchnię wewnętrzną przewodu pokarmowego.



Rys. 6.4. Przykładowe mapy przewodu pokarmowego, odpowiadające im obrazy oraz wykresy deskryptorów ruchu: (a) bezruch, (b) skurcze perystaltyczne i (c) skurcze mieszające. Liczby są numerami klatek filmu.



Figure 6.4. Sample maps of the gastrointestinal tract, the corresponding images, and plots of motion descriptors for: (a) motionlessness, (b) peristaltic contractions and (c) mixing contractions. The numbers denote video frame indices.

W obydwu przypadkach, po usunięciu lub dodaniu pierścienia, zapamiętywane są składowe koloru obrazu odczytane we współrzędnych kolejnych węzłów  $q$  zewnętrznego pierścienia. Wektory te zostają ułożone w szereg tworząc pojedynczą linię obrazu cyfrowego. Poszczególne linie, uzyskane podczas kolejnych zdarzeń usuwania i dodawania pierścieni, składane są kolejno razem tworząc mapę – obraz będący reprezentacją wewnętrznej powierzchni przewodu pokarmowego. Przykład fragmentu takiej mapy przedstawiono na rysunku 6.4.

Przydatność map została poddana ocenie diagnostów gastroenterologów [28], [29]. Stwierdzili oni, że mapy umożliwiają szybkie rozpoznanie obszarów krwawień, rozległych owrzodzeń oraz fragmentów, w których powierzchnia jelita jest przesłonięta treścią pokarmową. w czasie interpretacji filmu, dzięki zaproponowanej mapie, można więc pominąć fragmenty nieużyteczne z punktu widzenia diagnostyki medycznej i skupić uwagę na istotnych obszarach. Ponadto wykres estymaty prędkości  $V_p$  przydatny jest podczas lokalizacji miejsc, w których kapsułka się zatrzymała – może to wskazywać na przewężenia lub dysfunkcje przewodu pokarmowego. Przeprowadzone testy i porównania [22] wykazują również, że korzystanie z mapy przyspiesza wyszukiwanie zmian chorobowych lub zmniejsza liczbę zmian przeoczonych przez lekarza podczas interpretacji filmu standardowymi metodami.

## 7. ZASTOSOWANIE W ANALIZIE OBRAZÓW ZIAREN ZBÓŻ

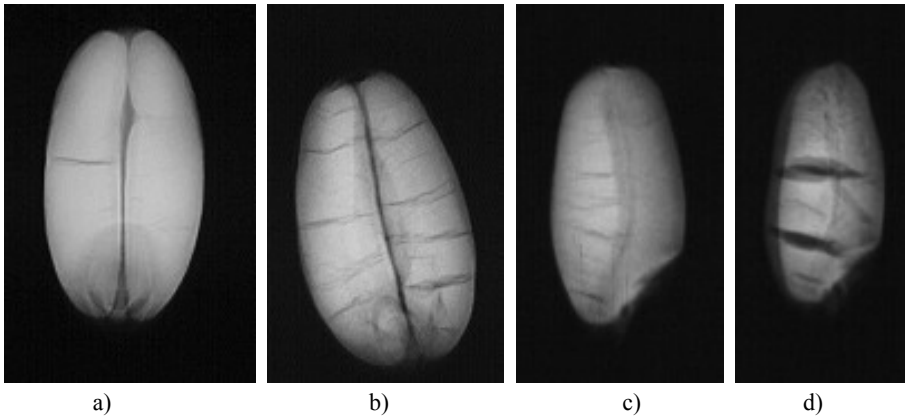
Innym przedmiotem analiz, które mogą być wykonywane z zastosowaniem modeli deformowalnych jest żywność. Przykładem może być analiza ziaren zbóż, określanie odmiany zboża oraz szeroko rozumianej jakości, w tym przydatności do zasiewu lub celów konsumpcyjnych.

Przykładem obrazów, które można poddać analizie za pomocą różnych modeli deformowalnych są rentgenowskie obrazy ziarniaków pszenicy. Obrazy na rysunku 7.1 przedstawiają ziarniaki w dwóch rzutach: na wprost oraz bocznym. w rzucie na wprost obraz pojedynczego ziarniaka jest w przybliżeniu symetryczny. Dwie połówki rozdzielone są bruzdką stanowiącą przybliżoną oś symetrii. Poszczególne połówki obrazu są jasne, podczas gdy bruzdka jest stosunkowo ciemna, tak że jej jasność jest zbliżona do jasności tła. Ziarniak nie jest natomiast symetryczny względem linii prostopadłej do bruzdki. w większości przypadków jest on nieznacznie szerszy po jednej stronie. Na krańcu szerszej części, w osi symetrii, znajduje się zarodek – stanowiąc nieznacznie ciemniejszą eliptyczną plamkę jest on rozróżnialny jedynie w przypadku nielicznych wizerunków ziarniaków.

W procesie suszenia, wewnątrz ziaren tworzą się pęknięcia widoczne na obrazie w postaci ciemnych linii skierowanych poprzecznie do bruzdki. Pęknięcia te nie mają

wpływu na wartość odżywczą i smakową, jednak w przypadku, w którym ziarno przeznaczone jest do zasiewu wielkość i położenie pęknięć ma kluczowe znaczenie [1], [30]. Im szersze jest pęknięcie i im bliżej znajduje się zarodka tym mniejsza jest szansa na prawidłowy wzrost. Pęknięcie takie utrudnia zarodkowi korzystanie ze wszystkich składników odżywczych zawartych w ziarniaku a tym samym zmniejsza szansę na prawidłowy rozwój siewki.

Analiza obrazów ziaren pszenicy, której celem jest ocena przydatności ziarniaka do zasiewu, polega więc na wyodrębnieniu z obrazu fragmentu reprezentującego ziarno, oznaczeniu jego położenia, orientacji, rozpoznaniu rzutu i rodzaju ziarna a także określeniu stopnia jego deformacji i uszkodzenia. Istotne jest też przede wszystkim określenie miejsca, w którym znajduje się zarodek. Jak wspomniano, to uszkodzenia w pobliżu zarodka mają bowiem większe znaczenie.

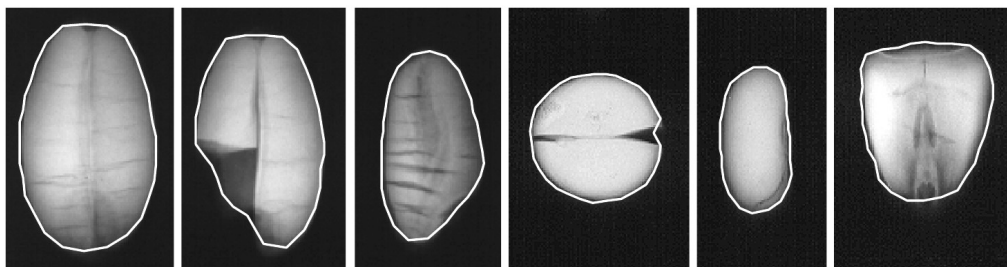


Rys. 7.1. Przykładowe obrazy rentgenowskie ziarniaków pszenicy: (a, b) w rzucie na wprost, (c, d) w rzucie bocznym. Pokazano ziarniaki o stosunkowo małej (a, c) i dużej (b, d) liczbie wewnętrznych pęknięć.

Figure 7.1. Example X-ray images of wheat kernels: (a, b) frontal and (c, d) side views. Examples demonstrate a relatively small (a, c) and severe (b, d) internal cracks.

W programie analizującym obrazy ziarniaków, wśród innych metod przetwarzania obrazów, zastosowano dwa różne modele deformowalne. Jednym z nich jest aktywny kontur radialny, który służy do wyznaczenia obszaru obrazu obejmującego pojedynczy ziarniak obrazu. Kontur inicjowany jest w kształcie okręgu o środku w przybliżonym środku ziarniaka i niewielkim promieniu. Przy czym środek ziarniaka jest wskazywany przez użytkownika lub za pomocą innych metod analizy obrazów. Wpływ obrazu na pojedynczy węzeł modelu zależy od jasności obrazu we współrzędnych węzła. Zwrot wektora oddziaływania jest do środka ziarniaka w przypadku gdy jasność jest mniejsza od pewnego przyjętego progu lub na zewnątrz w przypadku przeciwnym. Wartość bezwzględna oddziaływania zależy od różnicy pomiędzy jasnością obrazu we współrzędnych węzła a wspomnianym progiem.

Ponieważ współrzędne węzła dane są liczbami zmiennoprzecinkowymi, wymaga to więc przeprowadzenia interpolacji jasności analizowanego obrazu dyskretnego. Zaletą stosowania współrzędnych zmiennoprzecinkowych jest natomiast to, że uzyskiwany wynik, kształt konturu, ma charakter subpikselowy (dokładność większą niż odległość między sąsiednimi elementami obrazu rastrowego). w pracy [20] porównano różne metody segmentacji obrazów, w tym ziarniaków pszenicy. Wykazano, że algorytm wykorzystujący aktywny kontur radialny jest bardziej odporny na zakłócenia szumowe obrazu niż inne algorytmy, takie jak np. morfologiczne zamknięcie i otwarcie poprzedzone progowaniem jasności.



Rys. 7.2. Wynik dopasowania aktywnego konturu (biała linia) do różnych ziaren w obrazowaniu rentgenowskim.

Figure 7.2. Result of fitting the active contour (white line) to assorted kernels in X-ray radiographs.

Do oznaczenia orientacji ziarniaka wykorzystano deformowalny wzorec, w którym do obliczania naprężeń i deformacji siatki wykorzystano metodę szablonów geometrycznych. Jednym z problemów związanych z analizą jakości ziaren jest automatyczne rozpoznawanie ziaren pszenicy uwidocznionych w rzucie na wprost oraz w rzucie bocznym. w obu przypadkach możliwe jest określenie położenia zarodka, jednak tylko w przypadku rzutu na wprost możliwa jest np. ocena stopnia asymetrii ziarniaka – również przydatna do oceny jakości. Rozpoznawania takich obiektów dokonano za pomocą deformowalnego wzorca wymagało przygotowania wyidealizowanych, wzorcowych obrazów ziarniaków w rzucie bocznym i na wprost.

Na potrzeby analizy utworzono również dwa różne wzorce deformowalne. w węzłach jednego z nich zapisane zostały lokalne wartości jasności wzorcowego obrazu ziarniaka w rzucie na wprost, w węzłach drugiego jasności wzorcowego obrazu ziarniaka w rzucie bocznym. Analiza polegała na nałożeniu i dopasowaniu wzorców deformowalnych do analizowanych obrazów ziarniaków. Przy czym, wzorec ziarniak w rzucie na wprost nakładany i dopasowywany był dwukrotnie, za drugim razem obrócony o kąt 180 stopni. Wzorec ziarniaka w rzucie bocznym nakładany i dopasowywany był czterokrotnie, zmianie ulegał zarówno kąt obrotu wzorca jak i jego lustrzane odbicie. We wszystkich sześciu przypadkach obliczano średnią wartość energii naprężeń  $E_i$  oraz energii wpływu obrazu  $E_e$  równania (3.1). Wybór przypadku o najmniejszych wartościach średnich energii umożliwia zarówno

określenie rzutu jak również orientacji (kąta obrotu) ziarniaka. To drugie pozwala na przybliżone określenie umiejscowienia zarodka.

## 8. PODSUMOWANIE

Przedstawione oryginalne opracowania dotyczące modeli deformowalnych są wynikiem prac prowadzonych w ciągu ostatnich kilkunastu lat. Umożliwiają one rozwiązanie wielu nietrywialnych problemów z dziedziny analizy obrazów, których rozwiązanie innymi metodami nastęcza wiele trudności. Modele deformowalne pozwoliły na zautomatyzowanie procedur, które do tej pory wymagały udziału człowieka. Wykazano [22], że szczególnie w przypadku zastosowań medycznych, zastosowanie modeli deformowalnych zwiększa liczbę wykrytych zmian chorobowych oraz wiarygodność i powtarzalność wyników diagnozowania.

Wszystkie przedstawione algorytmy zostały zaimplementowane w postaci programów komputerowych: Ziarna [1], Siatki [20], MaZda [18], WCE Player [3], [31]. Programy te zostały udostępnione w internecie, są cytowane w literaturze naukowej, a ich działanie zostało sprawdzone w praktyce w różnych ośrodkach badawczych w Polsce i na świecie.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] P. Strumiłło, J. Niewczas, P. Szczypiński, P. Makowski, and W. Woźniak, "Computer System for Analysis of X-Ray Images of Wheat Grains," *Int. Agrophysics*, vol. 13, no. 1, pp. 133–140, 1999.
- [2] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos, "Snakes: Active contour models," *International journal of computer vision*, vol. 1, no. 4, pp. 321–331, 1988.
- [3] P. M. Szczypinski, R. D. Sriram, P. V. J. Sriram, and D. N. Reddy, "A model of deformable rings for interpretation of wireless capsule endoscopic videos," *Medical Image Analysis*, vol. 13, no. 2, pp. 312–324, Apr. 2009.
- [4] J. B. A. Maintz and M. A. Viergever, "A survey of medical image registration," *Medical Image Analysis*, vol. 2, no. 1, pp. 1–36, Mar. 1998.
- [5] E. Haber, S. Heldmann, and J. Modersitzki, "A computational framework for image-based constrained registration," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 431, no. 3, pp. 459–470, 2009.
- [6] S. Darkner, M. Vester-Christensen, R. R. Paulsen, and R. Larsen, "Non-rigid registration of 2D manifolds in 3D Euclidian space," 2008, p. 69142R–69142R–8.
- [7] P. Strumiłło and P. Szczypiński, "Application of an Active Contour Model for Extraction of Fuzzy and Broken Image Edges," *Machine Graphics & Vision*, vol. 5, no. 4, pp. 576–594, 1996.
- [8] P. Szczypiński and A. Materka, "Variable-Flexibility Elastic Model for Digital Image Analysis," in *XXI KKTOiUE*, Kiekrz, 1998.
- [9] S. Lobregt and M. A. Viergever, "A discrete dynamic contour model," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 14, pp. 12–24, Mar. 1995.
- [10] J. A. Sethian, *Level set methods and fast marching methods: evolving interfaces in*

*computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science.* Cambridge Univ Press, 1999.

- [11] Chenyang Xu, A. Yezzi, and J. L. Prince, "On the relationship between parametric and geometric active contours," presented at the Conference on Signals, Systems and Computers, 2000, vol. 1, pp. 483–489.
- [12] Chenyang Xu, A. Yezzi, and J. L. Prince, "A summary of geometric level-set analogues for a general class of parametric active contour and surface models," pp. 104–111.
- [13] S. R. Gunn and M. S. Nixon, "A model based dual active contour," in *Proc. British Machine Vision Conference*, 1994, pp. 305–314.
- [14] P. M. Szczypinski, "Selecting a motion estimation method for a Model of Deformable Rings," in *ICSES'06 - International Conference on Signals and Electronic Systems, Proceedings*, 2006, pp. 297–300.
- [15] R. Ronfard, "Region-based strategies for active contour models," *International Journal of Computer Vision*, vol. 13, no. 2, pp. 229–251, Oct. 1994.
- [16] L. D. Cohen, "On active contour models and balloons," *CVGIP: Image understanding*, vol. 53, no. 2, pp. 211–218, 1991.
- [17] P. Szczypiński, "Center-Point Model of Deformable Surface," in *Computer Vision and Graphics*, vol. 32, K. Wojciechowski, B. Smolka, H. Palus, R. S. Kozera, W. Skarbek, and L. Noakes, Eds. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2006, pp. 343–348.
- [18] P. M. Szczypinski, M. Strzelecki, A. Materka, and A. Klepaczko, "MaZda - a software package for image texture analysis," *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, vol. 94, no. 1, pp. 66–76, 2009.
- [19] P. M. Szczypinski, M. Strzelecki, and A. Materka, "Mazda - a software for texture analysis," in *Information Technology Convergence, 2007. ISITC 2007. International Symposium on*, 2007, pp. 245–249.
- [20] P. Szczypiński, "Modele deformowalne do ilościowej analizy i rozpoznawania obiektów w obrazach cyfrowych," Rozprawa doktorska, Wydział Elektrotechniki i Elektroniki Politechniki Łódzkiej, Łódź, 2000.
- [21] P. Szczypiński, P. V. J. Sriram, R. D. Sriram, and D. N. Reddy, "Przetwarzanie i wspomaganie interpretacji danych z endoskopu bezprzewodowego za pomocą modelu deformowalnych pierścieni," *Zeszyty Naukowe Elektronika*, vol. 10, pp. 129–147, 2005.
- [22] P. Szczypiński, *Komputerowa analiza obrazów z endoskopu bezprzewodowego dla diagnostyki medycznej*, vol. 1119. Łódź: Politechnika Łódzka, 2012.
- [23] N. J. Higham, "Computing the Polar Decomposition—with Applications," *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 7, no. 4, pp. 1160–1174, Oct. 1986.
- [24] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix computations*. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996.
- [25] G. Iddan, G. Meron, A. Glukhovsky, and P. Swain, "Wireless capsule endoscopy," *Nature*, vol. 405, no. 6785, p. 417, May 2000.
- [26] D. G. Adler and C. J. Goustout, "Wireless capsule endoscopy," *Hosp Physician*, vol. 39, no. 5, pp. 14–22, May 2003.
- [27] A. Bednarczuk and G. Rydzewska, "Endoskopia kapsułkowa—nadal nowość czy już standard w diagnostyce gastroenterologicznej?," *Polski Merkuriusz Lekarski*, vol. XXVI, no. 155, pp. 506–511, 2009.
- [28] P. M. Szczypiński, R. D. Sriram, P. V. J. Sriram, and D. N. Reddy, "A model of

deformable rings for interpretation of wireless capsule endoscopic videos,” *Medical Image Analysis*, vol. 13, no. 2, pp. 312–324, Apr. 2009.

- [29] P. M. Szczypiński, “Computer Program for Aiding in Wireless Endoscopic Video Interpretation,” in *Computers in Medical Activity*, vol. 65, E. Kački, M. Rudnicki, and J. Stempczyńska, Eds. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009, pp. 53–61.
- [30] J. Niewczas, “Ocena uszkodzeń mechanicznych ziarna pszenicy wykrywanych techniką rentgenograficzną,” *Acta Agrophysica, Instytut Agrofizyki im. B. Dobrzańskiego w Lublinie*, vol. 2, 1994.
- [31] P. Szczypiński and A. Klepaczko, “Automated Recognition of Abnormal Structures in WCE Images Based on Texture Most Discriminative Descriptors,” in *Image Processing and Communications Challenges 2*, vol. 84, R. S. Choraś, Ed. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010, pp. 263–270.

## ZAŁĄCZNIK

W załączniku zamieszczono wyprowadzenia równań wykorzystywanych w metodzie transformacji sąsiedztwa, służącej do modelowania naprężeń w modelach deformowalnych. Przedstawiono kilka nierównoważnych rozwiązań, z których każde może być stosowane w zależności od tego jakiego rodzaju deformacje i naprężenia mają podlegać modelowaniu. w przypadku transformacji skalowania, rozciągania, obrotu i przesunięcia wszystkie wymienione elementy transformacji są uznawane za dopuszczalne i nie są uznawane za deformację – nie stanowią źródła modelowania naprężenia. w przypadku transformacja skalowania, obrotu i przesunięcia, rozciągnięcie kierunkowe jest uznawane za deformację i ma wpływ na wartość obliczanej składowej energetycznej związanej z modelowaniem naprężeń. w przypadku transformacja obrotu i przesunięcia, zarówno skalowanie jak i rozciąganie jest traktowane jako deformacja. Najbardziej ogólną postacią jest ta wykorzystująca dekompozycję macierzy transformacji. w tym przypadku każdy z elementów transformacji można swobodnie modyfikować za pomocą parametrów.

### SYMBOLE

$\hat{\mathbf{v}}_s$  – wektor współrzędnych punktu węzłowego w modelu odniesienia, stały.

$\mathbf{v}_s$  – wektor współrzędnych punktu węzłowego w modelu deformowalnym.

$x, y$  – współrzędne, elementy wektora  $\mathbf{v}$ .

$N_s$  –  $n$ -sąsiedztwo punktu węzłowego  $s$ .

$\mathbf{J}_s$  – macierz transformacji  $n$ -sąsiedztwa punktu węzłowego  $s$ .

$\mathbf{T}_s$  – wektor translacji  $n$ -sąsiedztwa punktu węzłowego  $s$ .

$\varepsilon_s$  – błąd średniokwadratowy odległości między rzeczywistym położeniem węzłów a położeniem obliczonym na podstawie transformacji.

$\sum$  – symbol sumowania po wszystkich punktach węzłowych sąsiedztwa  $N_s$ .

### TRANSFORMACJA SKALOWANIA, ROZCIĄGANIA, OBROTU I PRZESUNIĘCIA

W transformacji afinicznej składającej się ze skalowania, rozciągania i obrotu macierz  $\mathbf{J}_s$  oraz wektor  $\mathbf{T}_s$  mają następującą postać:

$$\mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

Dla tego przypadku błąd  $\varepsilon_s$  można zapisać w następującej postaci:

$$\varepsilon_s = \sum \left( (x - t_1 + j_{11}\hat{x} + j_{12}\hat{y})^2 + (y - t_2 + j_{21}\hat{x} + j_{22}\hat{y})^2 \right)$$

a po przekształceniu:

$$\varepsilon_s = \sum \left( x^2 - 2xt_1 + t_1^2 + y^2 - 2yt_2 + t_2^2 + (j_{11}\hat{x})^2 + (j_{21}\hat{x})^2 + (j_{12}\hat{y})^2 + (j_{22}\hat{y})^2 \right) + 2 \sum \left( j_{11}j_{12}\hat{x}\hat{y} + j_{21}j_{22}\hat{x}\hat{y} - j_{11}(x - t_1)\hat{x} - j_{21}(y - t_2)\hat{x} - j_{12}(x - t_1)\hat{y} - j_{22}(y - t_2)\hat{y} \right)$$

Pochodne błędu  $\varepsilon_s$  po zmiennych  $t_1, t_2, j_{11}, j_{12}, j_{21}$  oraz  $j_{22}$  mają postać:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial j_{11}} = 2 \sum (j_{11} \hat{x}^2 + j_{12} \hat{x} \hat{y} - \hat{x}(x - t_1)) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial j_{12}} = 2 \sum (j_{12} \hat{y}^2 + j_{11} \hat{x} \hat{y} - \hat{y}(x - t_1)) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial j_{21}} = 2 \sum (j_{21} \hat{x}^2 + j_{22} \hat{x} \hat{y} - \hat{x}(y - t_2)) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial j_{22}} = 2 \sum (j_{22} \hat{y}^2 + j_{21} \hat{x} \hat{y} - \hat{y}(y - t_2)) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t_1} = 2 \sum (t_1 - x + j_{11} \hat{x} + j_{12} \hat{y}) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t_2} = 2 \sum (t_2 - y + j_{21} \hat{x} + j_{22} \hat{y}) = 0$$

Tym samym otrzymujemy układ równań, który można przedstawić w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \sum \hat{x}^2 & \sum \hat{x} \hat{y} & \sum \hat{x} \\ \sum \hat{x} \hat{y} & \sum \hat{y}^2 & \sum \hat{y} \\ \sum \hat{x} & \sum \hat{y} & \sum 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{11} \\ j_{12} \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \hat{x} x \\ \sum \hat{y} x \\ \sum x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sum \hat{x}^2 & \sum \hat{x} \hat{y} & \sum \hat{x} \\ \sum \hat{x} \hat{y} & \sum \hat{y}^2 & \sum \hat{y} \\ \sum \hat{x} & \sum \hat{y} & \sum 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{12} \\ j_{21} \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \hat{x} y \\ \sum \hat{y} y \\ \sum y \end{bmatrix}$$

Rozwiązaniem tego układu równań są:

$$\begin{bmatrix} j_{11} \\ j_{12} \\ t_1 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \sum \hat{x} x \\ \sum \hat{y} x \\ \sum x \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} j_{21} \\ j_{22} \\ t_2 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \sum \hat{x} y \\ \sum \hat{y} y \\ \sum y \end{bmatrix}$$

gdzie macierz  $\mathbf{M}$  dana jest równaniem:

$$\mathbf{M} = \frac{\begin{bmatrix} \sum \hat{y}^2 \sum 1 - (\sum \hat{y})^2 & \sum \hat{y} \sum \hat{x} - \sum \hat{x} \hat{y} \sum 1 & \sum \hat{x} \hat{y} \sum \hat{y} - \sum \hat{y}^2 \sum \hat{x} \\ \sum \hat{y} \sum \hat{x} - \sum \hat{x} \hat{y} \sum 1 & \sum \hat{x}^2 \sum 1 - (\sum \hat{x})^2 & \sum \hat{x} \hat{y} \sum \hat{x} - \sum \hat{x}^2 \sum \hat{y} \\ \sum \hat{x} \hat{y} \sum \hat{y} - \sum \hat{y}^2 \sum \hat{x} & \sum \hat{x} \hat{y} \sum \hat{x} - \sum \hat{x}^2 \sum \hat{y} & \sum \hat{x}^2 \sum \hat{y}^2 - (\sum \hat{x} \hat{y})^2 \end{bmatrix}}{\sum \hat{x}^2 \sum \hat{y}^2 \sum 1 - (\sum \hat{y})^2 \sum \hat{x}^2 - (\sum \hat{x} \hat{y})^2 \sum 1 - (\sum \hat{x})^2 \sum \hat{y}^2 + 2 \sum \hat{y} \sum \hat{x} \sum \hat{x} \hat{y}}$$



## TRANSFORMACJA SKALOWANIA, OBROTU I PRZESUNIĘCIA

W transformacji składającej się ze skalowania, obrotu i przesunięcia, w której przestrzeń transformowana nie jest rozciągana kierunkowo, macierz  $\mathbf{J}_s$  oraz wektor  $\mathbf{T}_s$  mają następującą postać:

$$\mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ -j_{12} & j_{11} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

Dla tego przypadku błąd  $\varepsilon_s$  można zapisać w następującej postaci:

$$\varepsilon_s = \sum (x^2 - 2xt_1 + t_1^2 + y^2 - 2yt_2 + t_2^2 + (j_{11}\hat{x})^2 + (j_{12}\hat{x})^2 + (j_{12}\hat{y})^2 + (j_{11}\hat{y})^2) + 2 \sum (j_{11}j_{12}\hat{x}\hat{y} - j_{12}j_{11}\hat{x}\hat{y} - j_{11}(x-t_1)\hat{x} + j_{12}(y-t_2)\hat{x} - j_{12}(x-t_1)\hat{y} - j_{11}(y-t_2)\hat{y})$$

Pochodne błędu  $\varepsilon_s$  po zmiennych  $t_1, t_2, j_{11}$  oraz  $j_{12}$  mają następującą postać:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial j_{11}} = 2 \sum (j_{11}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - \hat{x}(x-t_1) - \hat{y}(y-t_2)) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial j_{12}} = 2 \sum (j_{12}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - \hat{y}(x-t_1) + \hat{x}(y-t_2)) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t_1} = 2 \sum (t_1 - x + j_{11}\hat{x} + j_{12}\hat{y}) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t_2} = 2 \sum (t_2 - y - j_{12}\hat{x} + j_{11}\hat{y}) = 0$$

Tym samym otrzymujemy układ równań, który można przedstawić w postaci:

$$j_{11} \left( \sum \hat{x}^2 + \sum \hat{y}^2 \right) + t_1 \sum \hat{x} + t_2 \sum \hat{y} - \sum \hat{x}x - \sum \hat{y}y = 0$$

$$j_{12} \left( \sum \hat{x}^2 + \sum \hat{y}^2 \right) + t_1 \sum \hat{y} - t_2 \sum \hat{x} + \sum \hat{x}y - \sum \hat{y}x = 0$$

$$j_{11} \sum \hat{x} + j_{12} \sum \hat{y} + t_1 \sum 1 - \sum x = 0$$

$$j_{11} \sum \hat{y} - j_{12} \sum \hat{x} + t_2 \sum 1 - \sum y = 0$$

lub w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \left( \sum \hat{x}^2 + \sum \hat{y}^2 \right) & 0 & \sum \hat{x} & \sum \hat{y} \\ 0 & \left( \sum \hat{x}^2 + \sum \hat{y}^2 \right) & \sum \hat{y} & -\sum \hat{x} \\ \sum \hat{x} & \sum \hat{y} & \sum 1 & 0 \\ \sum \hat{y} & -\sum \hat{x} & 0 & \sum 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{11} \\ j_{12} \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \hat{x}x + \sum \hat{y}y \\ \sum \hat{y}x - \sum \hat{x}y \\ \sum x \\ \sum y \end{bmatrix}$$

Rozwiązaniem układu równań jest:

$$\begin{bmatrix} j_{11} \\ j_{12} \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \sum 1 & 0 & -\sum \hat{x} & -\sum \hat{y} \\ 0 & \sum 1 & -\sum \hat{y} & \sum \hat{x} \\ -\sum \hat{x} & -\sum \hat{y} & (\sum \hat{x}^2 + \sum \hat{y}^2) & 0 \\ -\sum \hat{y} & \sum \hat{x} & 0 & (\sum \hat{x}^2 + \sum \hat{y}^2) \end{bmatrix}}{(\sum \hat{x}^2 + \sum \hat{y}^2) \sum 1 - (\sum \hat{x})^2 - (\sum \hat{y})^2} \begin{bmatrix} \sum \hat{x}x + \sum \hat{y}y \\ \sum \hat{y}x - \sum \hat{x}y \\ \sum x \\ \sum y \end{bmatrix}$$

## TRANSFORMACJA OBROTU I PRZESUNIĘCIA

W transformacji składającej się z obrotu i przesunięcia, w której przestrzeń transformowana nie jest skalowana oraz rozciągana kierunkowo, macierz  $\mathbf{J}_s$  oraz wektor  $\mathbf{T}_s$  mają następującą postać:

$$\mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

Jeśli dla przestrzeni dwuwymiarowej  $\mathbf{v}_i = [x, y]^T$  oraz  $\hat{\mathbf{v}}_i = [\hat{x}, \hat{y}]^T$ , wówczas błąd  $\varepsilon_s$  można zapisać w następującej postaci:

$$\varepsilon_s = \sum \left( (x - t_1 + \hat{x} \cos \alpha + \hat{y} \sin \alpha)^2 + (y - t_2 - \hat{x} \sin \alpha + \hat{y} \cos \alpha)^2 \right)$$

Sumowanie jest tu wykonywane dla wszystkich węzłów należących do sąsiedztwa węzła  $s$ . Po przekształceniu otrzymuje się:

$$\varepsilon_s = \sum \left( x^2 - 2xt_1 + t_1^2 + y^2 - 2yt_2 + t_2^2 + (\hat{x})^2 + (\hat{y})^2 \right) + 2 \sum \left( -(x - t_1) \hat{x} \cos \alpha + (y - t_2) \hat{x} \sin \alpha - (x - t_1) \hat{y} \sin \alpha - (y - t_2) \hat{y} \cos \alpha \right)$$

Pochodne błędu  $\varepsilon_s$  po zmiennych  $t_1, t_2$  oraz  $\alpha$  mają następującą postać:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t_1} = 2 \sum (t_1 - x + \hat{x} \cos \alpha + \hat{y} \sin \alpha) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t_2} = 2 \sum (t_2 - y - \hat{x} \sin \alpha + \hat{y} \cos \alpha) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \alpha} = 2 \sum \left( (\hat{y}(x - t_1) - \hat{x}(y - t_2)) \cos \alpha + (\hat{x}(x - t_1) + \hat{y}(y - t_2)) \sin \alpha \right) = 0$$

a po przekształceniu:

$$\begin{aligned} & \cos \alpha \sum (\hat{y}x - \hat{x}y) - t_1 \cos \alpha \sum \hat{y} + t_2 \cos \alpha \sum \hat{x} + \\ & + \sin \alpha \sum (\hat{x}x + \hat{y}y) - t_1 \sin \alpha \sum \hat{x} - t_2 \sin \alpha \sum \hat{y} = 0 \\ & \cos \alpha \sum \hat{x} + \sin \alpha \sum \hat{y} + t_1 \sum 1 - \sum x = 0 \\ & \cos \alpha \sum \hat{y} - \sin \alpha \sum \hat{x} + t_2 \sum 1 - \sum y = 0 \end{aligned}$$

Po wyznaczeniu niewiadomych  $t_1$  i  $t_2$  z drugiego i trzeciego równania układu otrzymujemy:

$$t_1 = \frac{\sum x - \cos \alpha \sum \hat{x} - \sin \alpha \sum \hat{y}}{\sum 1}$$

$$t_2 = \frac{\sum y - \cos \alpha \sum \hat{y} + \sin \alpha \sum \hat{x}}{\sum 1}$$

a po podstawieniu tych rozwiązań do równania pierwszego, otrzymuje się:

$$\sum 1 (\cos \alpha \sum (\hat{y}x - \hat{x}y) + \sin \alpha \sum (\hat{x}x + \hat{y}y)) +$$

$$- (\cos \alpha \sum \hat{y} + \sin \alpha \sum \hat{x}) (\sum x - \cos \alpha \sum \hat{x} - \sin \alpha \sum \hat{y}) +$$

$$+ (\cos \alpha \sum \hat{x} - \sin \alpha \sum \hat{y}) (\sum y + \cos \alpha \sum \hat{y} - \sin \alpha \sum \hat{x}) = 0$$

Po dalszych przekształceniach uzyskuje się równanie w postaci:

$$\cos \alpha (\sum (\hat{y}x - \hat{x}y) \sum 1 - \sum \hat{y} \sum x + \sum \hat{x} \sum y) +$$

$$+ \sin \alpha (\sum (\hat{x}x + \hat{y}y) \sum 1 - \sum \hat{x} \sum x + \sum \hat{y} \sum y) +$$

$$+ 2 \sum \hat{x} \sum \hat{y} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 0$$

Korzystając z tożsamości tzw. jedynki trygonometrycznej otrzymujemy:

$$\sin \alpha = \frac{2 \sum \hat{x} \sum \hat{y} + \cos \alpha (\sum (\hat{y}x - \hat{x}y) \sum 1 - \sum \hat{y} \sum x + \sum \hat{x} \sum y)}{(\sum \hat{x} \sum x - \sum \hat{y} \sum y - \sum (\hat{x}x + \hat{y}y) \sum 1)}$$

a po dalszych przekształceniach równanie kwadratowe z niewiadomą  $\cos \alpha$ :

$$1 - \cos^2 \alpha = \left( \frac{2 \sum \hat{x} \sum \hat{y} + \cos \alpha (\sum (\hat{y}x - \hat{x}y) \sum 1 - \sum \hat{y} \sum x + \sum \hat{x} \sum y)}{(\sum \hat{x} \sum x - \sum \hat{y} \sum y - \sum (\hat{x}x + \hat{y}y) \sum 1)} \right)^2$$

Rozwiązując to równanie, a następnie wyznaczając niewiadome  $\sin \alpha$ ,  $t_1$  i  $t_2$  otrzymuje się dwa rozwiązania:

$$\sin \alpha = -\frac{(RQ - P\sqrt{P^2 + Q^2 - R^2})}{P^2 + Q^2}; \quad \cos \alpha = -\frac{(RP + Q\sqrt{P^2 + Q^2 - R^2})}{P^2 + Q^2}$$

oraz

$$\sin \alpha = -\frac{(RQ + P\sqrt{P^2 + Q^2 - R^2})}{P^2 + Q^2}; \quad \cos \alpha = -\frac{(RP - Q\sqrt{P^2 + Q^2 - R^2})}{P^2 + Q^2}$$

gdzie:

$$P = \sum (\hat{y}x - \hat{x}y) \sum 1 - \sum \hat{y} \sum x + \sum \hat{x} \sum y$$

$$Q = \sum (\hat{x}x + \hat{y}y) \sum 1 - \sum \hat{x} \sum x + \sum \hat{y} \sum y$$

$$R = 2 \sum \hat{x} \sum \hat{y}$$

Wyboru rozwiązania dokonuje się po sprawdzeniu, dla którego z rozwiązań wartość błędu  $\varepsilon_s$  jest mniejsza.

## DEKOMPOZYCJA MACIERZY TRANSFORMACJI

Przyjmijmy, że obliczona została macierz  $\mathbf{J}_s$  dla wariantu transformacji skalowania, rozciągania, obrotu i przesunięcia. Dla uproszczenia zapisu w dalszej części indeks  $s$  zostanie pominięty.

Macierz  $\mathbf{J}$  można przedstawić jako iloczyn dwóch macierzy  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{S}$ .

$$\mathbf{J} = \mathbf{U} \mathbf{S}$$

Macierz  $\mathbf{U}$  jest macierzą ortonormalną (ang. *unitary matrix*) natomiast macierz  $\mathbf{S}$  jest macierzą symetryczną. Rozkład macierzy  $\mathbf{J}$  na macierze  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{S}$  nazywa się rozkładem biegunowym (ang. *polar decomposition*).

Własnością macierzy  $\mathbf{U}$  jest, że

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$$

Jeśli rozpatruje się przypadek przestrzeni dwuwymiarowej wówczas macierz  $\mathbf{U}$  można zapisać w postaci:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

gdzie  $\alpha$  jest kątem obrotu w transformacji.

Stąd wynika, że:

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{J} = \mathbf{U}^T \mathbf{J} = \begin{bmatrix} j_{11} \cos \alpha + j_{21} \sin \alpha & j_{12} \cos \alpha + j_{22} \sin \alpha \\ j_{21} \cos \alpha - j_{11} \sin \alpha & j_{22} \cos \alpha - j_{12} \sin \alpha \end{bmatrix}$$

Ponieważ macierz  $\mathbf{S}$  jest symetryczna to:

$$j_{12} \cos \alpha + j_{22} \sin \alpha = j_{21} \cos \alpha - j_{11} \sin \alpha$$

a po przekształceniu:

$$(j_{21} - j_{12}) \cos \alpha = (j_{11} + j_{22}) \sin \alpha$$

Umożliwia to obliczenie kąta  $\alpha$  jako nachylenia wektora  $\begin{bmatrix} j_{21} - j_{12} & j_{11} + j_{22} \end{bmatrix}^T$ :

$$\alpha = \angle \begin{bmatrix} j_{21} - j_{12} \\ j_{11} + j_{22} \end{bmatrix}^T$$

przy czym kąt  $\alpha$  podawany jest w zakresie od  $-\pi$  do  $+\pi$ .

Macierz  $\mathbf{S}$  jest obliczana za pomocą równania

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}^T \mathbf{J}$$

Macierz symetryczną  $\mathbf{S}$  można z kolei przedstawić w postaci:

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{Q}$$

gdzie macierz  $\mathbf{D}$  jest macierzą diagonalną natomiast macierz  $\mathbf{Q}$  jest macierzą ortonormalną. Macierz ortonormalną  $\mathbf{Q}$  można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Do rozkładu macierzy  $\mathbf{S}$  na macierze  $\mathbf{Q}$  oraz  $\mathbf{D}$  stosuje się rozkład własny macierzy (ang. *eigen decomposition*). Wiersze macierzy  $\mathbf{Q}$  złożone są ze

znormalizowanych wektorów własnych macierzy  $\mathbf{S}$ , natomiast wartości własne macierzy  $\mathbf{S}$  stanowią elementy diagonalni macierzy  $\mathbf{D}$ . Wartości własne macierzy  $\mathbf{S}$  dla przypadku przestrzeni dwuwymiarowej można obliczyć jako:

$$\lambda_{s1} = \text{trace } \mathbf{S} + \sqrt{(\text{trace } \mathbf{S})^2 - 4 \det \mathbf{S}}$$

$$\lambda_{s2} = \text{trace } \mathbf{S} - \sqrt{(\text{trace } \mathbf{S})^2 - 4 \det \mathbf{S}}$$

gdzie  $\text{trace } \mathbf{S} = s_{11} + s_{22}$  oznacza ślad macierzy  $\mathbf{S}$  a  $\det \mathbf{S}$  oznacza jej wyznacznik.

Macierz  $\mathbf{D}$  ma postać:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_{s1} & 0 \\ 0 & \lambda_{s2} \end{bmatrix} = \sqrt{|\det \mathbf{D}|} \begin{bmatrix} \frac{\lambda_{s1}}{\sqrt{|\det \mathbf{D}|}} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_{s2}}{\sqrt{|\det \mathbf{D}|}} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Aby wyznaczyć kąt  $\beta$  oraz macierz  $\mathbf{Q}$  można zauważyć, że:

$$\mathbf{QS} = \mathbf{DQ}$$

co można zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Oznacza to, między innymi, że:

$$s_{11} \cos \beta - s_{21} \sin \beta = \lambda_1 \cos \beta$$

co umożliwia obliczenie kąta  $\beta$  jako:

$$\beta = \angle [j_{11} - \lambda_1 \quad j_{21}]^T$$

Finalizuje to rozkład macierzy  $\mathbf{J}$  do postaci:

$$\mathbf{J} = a \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

W modelowaniu naprężeń wykorzystuje się macierz  $\mathbf{J}^*$  oraz wektor  $\mathbf{T}^*$  dane równaniami:

$$\mathbf{J}^* = A^* \begin{bmatrix} \cos \alpha^* & \sin \alpha^* \\ -\sin \alpha^* & \cos \alpha^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta^* & -\sin \beta^* \\ \sin \beta^* & \cos \beta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^* & 0 \\ 0 & \lambda_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta^* & \sin \beta^* \\ -\sin \beta^* & \cos \beta^* \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^* = \rho_T \mathbf{T}$$

Przy czym:

$$A^* = (\sqrt{\det \mathbf{D}})^{\rho_A}; \quad \alpha^* = \rho_R \alpha; \quad \lambda_1^* = \lambda_1^{\rho_S}; \quad \lambda_2^* = \lambda_2^{\rho_S}$$

Odpowiednie elementy macierzy oraz wektora są modyfikowane za pomocą parametrów  $\rho_A$ ,  $\rho_R$ ,  $\rho_S$  i  $\rho_T$ . Parametry te dobiera się w zakresie od zera do jedności, a ich wartości określają udział danego komponentu lub współczynnika w wynikowej transformacji. Wartości parametrów równe jedności oznaczają, że odpowiadająca im

składowa transformacji nie jest wykorzystywana do modelowania naprężeń. Im parametr ma mniejszą wartość w tym większym stopniu odpowiednia składowa wpływa na wielkość modelowanego naprężenia.